Marius Burtea Georgeta Burtea

Lenuța Alexa ▪ Eugen Alexandrov ▪ Laura Amariei ▪ Gina Avădanei ▪ Emil Badea ▪ Didina Buculei
Daniela Busuioc ▪ Dumitru Crăcană ▪ Oana Ban ▪ Viorica Brisc ▪ Nicoleta Sofian Boca
Aurora Cojocariu ▪ Mihaela Cojocnean ▪ Emilia Copaciu ▪ Mirela Corjos ▪ Silvia Costin
Cristina Coșerea ▪ Ștefan Cristescu ▪ Felicia Cristescu ▪ Minodora Deac ▪ Marius Dragomir
Adriana Drăgoi ▪ Cristina Monica Epure ▪ Gabriela Mariana Faina ▪ Gavril Sorin Galea
Mihaela Ghelbere ▪ Constanța Gusta ▪ Rodica Habor ▪ Irina Humă ▪ Corneliu Huzum ▪ Letiția Ignat
Magdalena Iorgulescu ▪ Livia Iosif ▪ Mihaela Lazăr ▪ Magdalena Lefter ▪ Mihaela Lucan ▪ Maria Macar
Cristina Magirescu ▪ Elisabeta Mihoc ▪ Liliana Miroș ▪ Niculina Mihaela Moisuc ▪ Cerasela Momoiu
Alunița Neag ▪ Mihaela Neagu ▪ Gabriela Nut ▪ Carmen Oniciuc ▪ Aura-Loreta Pogorevici
Annamaria Pop ▪ Anca Elena Pop ▪ Doina Florina Popa ▪ Mihaela-Crina Popa ▪ Olga Radu
Vasile Roșca ▪ Anișoara Rotariu ▪ Olimpia State ▪ Ana Mădălina Șerban ▪ Valentin Ștefan
Ileana Șuba ▪ Laurențiu Tătaru ▪ Lenuța Țicală ▪ Marian Ușer

BACALAUREAT 2017

MATEMATICĂ

FILIERA TEHNOLOGICĂ

EXERCIŢII RECAPITULATIVE • TESTE

CAMPION

Scanned with OKEN Scanner

MATEMATICĂ

Filiera tehnologică

Mozuru Iulia
XII G
Amin (Doamne Ajută)!!

Exerciții recapitulative.
Teste.

Bacalaureat 2017

2,50 +

CAMPION

Scanned with OKEN Scanner

Copyright © Editura Campion 2016

Toate drepturile asupra acestei lucrări aparţin Editurii Campion
Reproducerea în scopuri comerciale, adaptarea, distribuţia sau transmiterea uneia sau a mai multor părţi din această carte, în orice scop şi sub orice formă, este interzisă fără acordul prealabil al editurii.

Copertă: Gabriel Iancu

Comenzi se pot face:
- telefonic: 0742.014.405
- fax: 021/ 411.33.93
- e-mail: edituracampion@gmail.com

ISBN 978-606-8323-96-1

Scanned with OKEN Scanner

PREFAŢĂ

Lucrarea " **MATEMATICĂ. Filiera tehnologică. Exerciţii recapitulative. Teste.** " reprezintă un auxiliar necesar în pregătirea examenului de Bacalaureat. Aceasta este în concordanţă cu Programa de Bacalaureat elaborată pentru următoarele filiere :

- Filiera tehnologică, profilul servicii – toate calificările profesionale, profilul resurse – toate calificările profesionale, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

Conţinutul lucrării este următorul :

1. **Mic breviar teoretic** regăsit la începutul fiecarui capitol cu exerciţii recapitulative.

2. ***Teme recapitulative*** organizate în concordanţă cu Programa de Bacaluareat, clasele a-IX-a – a XII-a.

Acestea sunt concepute respectând modelul problemelor care au apărut în cadrul examenului de Bacalaureat din sesiunile precedente şi asigură recapitularea prin probleme adecvate a întregului material cuprins în programă.

3. ***Variante complete de subiecte pentru Examenul de Bacalaureat***

Acestea sunt concepute în conformitate cu modelul de subiect elaborat de Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar.

Fiecare dintre cele trei subiecte ale fiecărei variante este punctat cu 30 de puncte, repartizate în mod egal în cadrul fiecăruia. Din oficiu se acordă 10 puncte.

4. ***Soluţii, indicaţii şi răspunsuri pentru fiecare problemă***

Culegerea este realizată de un colectiv lărgit de profesori de matematică cu o bogată experienţă profesională, realizând o unitate în diversitatea de gândire şi idei, dând o garanţie a posibilităţii parcurgerii întregii programe de bacalaureat prin probleme adecvate.

Autorii.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Prefaţă 3

TEME RECAPITULATIVE 5

CLASA A IX-A

Cap I. Mulţimi şi elemente de logică matematică 6
Cap II. Funcţii 10
Cap III. Vectori în plan 26
Cap IV. Trigonometrie şi aplicaţii ale trigonometriei în geometrie 30

CLASA A X-A

Cap I. Mulţimi de numere 36
Cap II. Funcţii şi ecuaţii 42
Cap III. Probleme de numărare 47
Cap IV. Elemente de statistică şi probabilităţi 50
Cap V. GEOMETRIE 53

CLASA A XI-A

ALGEBRĂ

Cap I. Matrice 58
Cap II. Determinanţi 62
Cap III. Sisteme de ecuaţii liniare 68

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Cap I. Limite de funcţii 74
Cap II. Funcţii continue 81
Cap III. Funcţii derivabile 84
Cap III. Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor 91

CLASA A XII-A

ALGEBRĂ

Cap I. Grupuri 97
Cap II. Inele şi corpuri 103

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Cap I. Primitive 117
Cap II. Integrala definită 120
Cap III. Aplicaţii ale integralei definite 123

Variante de subiecte pentru Bacalaureat 130

Soluţii, indicaţii şi răspunsuri 197

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII RECAPITULATIVE
CLASA A IX-A

I. Mulţimi şi elemente de logică matematică

II. Funcţii

2.1. Şiruri

2.2. Funcţii. Lecturi grafice

2.3. Funcţia de gradul I

2.4. Funcţia de gradul II

III. Vectori în plan

IV. Trigonometrie şi aplicaţii ale trigonometriei în geometrie

Scanned with OKEN Scanner

I. MULŢIMI ŞI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

Puteri cu exponent întreg.

- Dacă $a\in\mathbb{R}^*$ şi $n\in\mathbb{N}^*$: $a^0=1, a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ factori}}, a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.
- Dacă $a,b\in\mathbb{R}, m,n\in\mathbb{Z}$, au loc proprietăţile:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\quad a^m:a^n=a^{m-n},\quad (a^m)^n=a^{mn},\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}, b\neq 0,\quad (ab)^n=a^n\cdot b^n$$

Rădăcina pătrată a numărului pozitiv x este numărul real pozitiv, notat $\sqrt{x}$, al cărui pătrat este egal cu x.

Reguli de calcul. Pentru $a,b\in(0,+\infty)$.

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab},\quad \sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{\frac{a}{b}},\quad (\sqrt{a})^m=\sqrt{a^m},\quad c\sqrt{a}=\begin{cases}\sqrt{c^2a}, c\geq 0\\ -\sqrt{c^2a}, c<0\end{cases},\quad \sqrt{x^2}=|x|, \forall x\in\mathbb{R}$$

Ordonarea numerelor reale

- Relaţia "$\leq$" este relaţie de ordine pe $\mathbb{R}$, adică are proprietăţile:
  a) reflexivitatea $a\leq a, \forall a\in\mathbb{R}$; b) antisimetria: $a\leq b, b\leq a\Rightarrow a=b$;
  c) tranzitivitatea: $a\leq b, b\leq c\Rightarrow a\leq c$.
- Alte proprietăţi ale relaţiei "$\leq$":
  a) $a\leq b\Rightarrow a+x\leq b+x, \forall a,b,x\in\mathbb{R}$; b) $a\leq b$ şi $x\geq 0\Rightarrow ax\leq bx, a,b\in\mathbb{R}$;
  c) $a\leq b$ şi $x\leq 0\Rightarrow ax\geq bx, a,b\in\mathbb{R}$; d) $\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}, a,b\in(0,+\infty)$;
  ($m_{arim}\leq m_{geom}\leq m_{arit}$ inegalitatea mediilor).

Modulul unui număr real.

$|x|=\begin{cases}x, x\geq 0\\ -x, x<0\end{cases}$ (modulul sau valoarea absolută a lui x).

Proprietăţi:

a) $|x|\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$; b) $|x|=0\Leftrightarrow x=0$; c) $|-x|=|x|, x\in\mathbb{R}$;

d) $|x+y|\leq|x|+|y|$; e) $|xy|=|x|\cdot|y|$; f) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}, y\neq 0$;

g) $\sqrt{x^2}=|x|, x\in\mathbb{R}$; h) $|x|\leq c\Leftrightarrow -c\leq x\leq c$ i) $|x|\geq c\Leftrightarrow x\leq -c$ sau $x\geq c$.

Partea întreagă a numărului $x\in\mathbb{R}$ este cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu x. Se notează $[x]$.

$[x]\in\mathbb{Z}$ şi $[x]\leq x<[x]+1$; $x-1<[x]\leq x$; $[x+n]=[x]+n, n\in\mathbb{Z}$;

Partea fracţionară a numărului $x\in\mathbb{R}$ este numărul, notat $\{x\}$, cu proprietatea că $\{x\}=x-[x]$.

$[x]+\{x\}=x$; $\{x+n\}=\{x\}, n\in\mathbb{Z}$

Tabel de adevăr pentru operaţii cu propoziţii.

Scanned with OKEN Scanner

$v(p)$	$v(q)$	$v(p\vee q)$	$v(p\wedge q)$	$v(p\to q)$	$v(p\leftrightarrow q)$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Metoda inducției matematice.

Fie $m\in\mathbb{N}$ și $P(n)$ o propoziție matematică, $n\in\mathbb{N}, n\geq m$.

"$P(n), \forall n, n\geq m$" este adevărată dacă:

a) $P(m)$ este adevărată;

b) $P(k)\to P(k+1)$ este adevărată.

1. Să se calculeze:

a) $2-2\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)$; b) $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3+1\right]:\frac{7}{4}$.

2. Să se calculeze:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{15}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}-\sqrt{7}\cdot\sqrt{21}$; b) $\left(\sqrt{5}+1\right)^2-\sqrt{20}$; c) $4^{-3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}\cdot 2^5\cdot 8^{-2}$.

3. Să se arate că numărul $a=\left(\sqrt{5}+1\right)^2+\left(\sqrt{5}-1\right)^2$ este număr natural.

4. Să se arate că numărul $b=\left(2-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{11-4\sqrt{6}}$ este număr natural.

5. Știind că $a=\sqrt{64}+\sqrt{36}$ și $b=\sqrt{\frac{49}{100}}-\sqrt{\frac{4}{25}}$, să se calculeze:

a) $a-30\cdot b$; b) $a^2-9\cdot b^{-1}$; c) $\left(\frac{a}{10}-2b\right)^3$.

6. Să se efectueze:

a) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2+2\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2$;

b) $(a-b)^2+2(a-b)(a+b)+(a+b)^2$.

7. Să se arate că expresia $E=2(3x+1)(1-3x)+(3x-2)^2+(3x+2)^2$ nu depinde de x.

8. Se dau numerele: $a=8-\sqrt{28}$, $b=2\sqrt{7}+8$. Să se calculeze diferența dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b.

9. Să se ordoneze crescător numerele: $a=-\frac{7}{2}$; $b=2\frac{2}{5}$; $c=2,3$; $d=-\frac{17}{5}$.

10. Să se ordoneze descrescător numerele: $a=2,43$; $b=2,(4)$; $c=2,(43)$; $d=2,4(3)$.

11. Să se compare numerele x și y în cazurile:

a) $x=4,3591$; $y=4,3587$; b) $x=-3,285$; $y=-3,098$;

c) $x=3\sqrt{3}$; $y=2\sqrt{7}$; d) $x=-6\sqrt{2}$; $y=-5\sqrt{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

12. Să se scrie aproximările zecimale prin lipsă cu o eroare de 10^{-3} pentru numerele:

$a=2,40679;\quad b=-4,12574;\quad c=\frac{4205}{12}.$

13. Să se scrie aproximările zecimale prin adaos cu o eroare de 10^{-1} pentru numerele:

$a=2,342;\quad b=-\frac{155}{19};\quad c=\frac{491}{3};\quad d=-3,(41).$

14. Să se scrie rotunjirile la a doua şi la a treia zecimală pentru numerele:

$a=6,18719;\quad b=\frac{307}{6};\quad c=2,71(6).$

15. Să se scrie truncherile de ordinul 2 pentru numerele:

$a=3,4125-2,1578;\quad b=2,453\cdot 5;\quad c=-4,5241:2;\quad d=-4,2(53);\quad e=\frac{759}{48}.$

16. Să se scrie aproximările cu două zecimale exacte ale numerelor:

$a=\sqrt{5};\quad b=\sqrt{45};\quad c=3\pi$ (luând $\pi\approx 3,141592$).

17. Numărul $\frac{4}{11}$ se scrie sub formă de fracţie zecimală infinită sub forma $0,a_1a_2a_3\ldots$. Să se determine zecimala a_{40}.

18. Numărul $\frac{10}{13}$ se scrie sub formă de fracţie zecimală infinită sub forma $0,a_1a_2a_3\ldots$. Să se determine suma $a_{35}+a_{99}$.

19. Să se determine partea întreagă şi partea fracţionară a numerelor:

$a=12,05;\quad b=-12,05;\quad c=\frac{1243}{7};\quad d=\frac{517}{16};\quad e=-\frac{185}{8}.$

20. Să se determine partea întreagă şi partea fracţionară a numerelor:

$a=\frac{3,12-2,13}{2,5};\quad b=\frac{-3^2+(-3)^2+\sqrt{(-7)^2}}{4}.$

21. Să se determine partea întreagă a numerelor

$a=\sqrt{2010};\quad b=-\sqrt{512};\quad c=\sqrt{6\frac{1}{4}}+\sqrt{5\frac{4}{9}}\cdot 0,6+\frac{4}{5}.$

22. Să se calculeze: a) $\left[\sqrt{7}\right]-2\cdot\left[-\sqrt{30}\right]+\frac{5}{3}\cdot\{-1,4\};$ b) $\left[\sqrt{2012}\right]-16\cdot\left\{\frac{25}{4}\right\}.$

23. Se consideră numerele $a=\left(\sqrt{2}-1\right)^2+\left(\sqrt{2}+1\right)^2$ şi $b=\frac{45}{7}$. Să se arate că $3\cdot[a]-14\{b\}=0.$

24. Se consideră mulţimea $A=\{x\in\mathbb{R}\mid 2x-3\le 9\}$. Să se determine mulţimea $A\cap\mathbb{N}$.

25. Se consideră mulţimea $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -5\le x-1\le 4\}$. Să se determine mulţimile:

a) $B\cap\mathbb{Z};$ b) $B\cap\mathbb{N}.$

26. Se consideră mulţimea $A=\left\{-\frac{2}{3};\ \sqrt{\frac{4}{25}};\ 2,(3);\ 0;\ -8;\ \sqrt{12};\ -\sqrt{9}\right\}$. Să se determine mulţimile:

a) $A\cap\mathbb{N};$ b) $A\cap\mathbb{Z};$ c) $A\cap\mathbb{Q};$ d) $A\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}).$

27. Să se calculeze:

Scanned with OKEN Scanner

a) $|4,8-5,7|$; b) $\left|\sqrt{2,25}-\sqrt{5,76}\right|$; c) $\left|1+\sqrt{3}-\sqrt{12}\right|$; d) $\left|(-3)^3\right|$.

28. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia:

a) $|x+4|=5$; b) $|-2x+7|=3$; c) $|5x-20|=0$; d) $|2x-1|=-3$.

29. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia:

a) $\left|-2x+\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{6}$; b) $\left|x-\sqrt{18}\right|=\sqrt{2}$; c) $\left|\sqrt{3}\cdot x-1\right|=0$; d) $\left|\frac{x}{3}-\frac{4}{9}\right|=\frac{2}{3}$.

30. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia:

a) $|3x+2|=x$; b) $|-5x+2|=-x+3$; c) $|-x+1|=-5x+4$.

31. Folosind proprietăţile modulului unui număr real să se determine $x\in\mathbb{Z}$ care verifică:

a) $|x|\le 5$; b) $|x|<4$; c) $|x|>2$; d) $|x|\ge 3$.

32. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţiile:

a) $|x-7|<2$; b) $|3x-1|\le 5$; c) $|1-6x|<-1$; d) $|2x-16|\le 0$.

33. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţiile:

a) $|x-5|>1$; b) $|3-x|>2$; c) $|2x+1|\ge 1$; d) $|x|\ge -4$.

34. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $|x-2|+|x^2-4|=0$.

35. Să se arate că numărul $n=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ este număr natural.

36. Să se precizeze valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

a) $\frac{2}{3}\in\left(-\frac{3}{4},\frac{4}{5}\right)$; b) $4\in[2,4]$; c) $\frac{\sqrt{6}}{2}\in\left(-\infty,\frac{5}{4}\right)$;

d) $\sqrt{5}\notin(2,2,3]$; e) $\sqrt{7}\in(2,3)$; f) $7\notin\left(\frac{62}{9},\frac{64}{9}\right)$.

37. Să se expliciteze relaţiile:

a) $x\in(-2,2)$; b) $x\in[-1,4]$; c) $x\in(-\infty,-2)$;

d) $x\in\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$; e) $x\notin(-1,1)$; f) $x\notin(-\infty,0)$.

38. Să se scrie sub formă de interval de numere reale următoarele mulţimi:

a) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\le\frac{2}{3}\right\}$; b) $B=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x>-\frac{5}{3}\right\}$; c) $C=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x<\sqrt{3}\right\}$.

39. Să se scrie ca interval de numere reale mulţimile:

a) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -5\le x\le 4\}$; b) $B=\left\{x\in\mathbb{R}\mid -3\le x\le\frac{7}{2}\right\}$; c) $C=\{x\in\mathbb{R}\mid -8\le 2x<2\}$.

40. Se consideră mulţimea $A=\{x\in\mathbb{R}\mid |2x-5|\le 9\}$. Să se scrie A sub formă de interval.

41. Se consideră mulţimile $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -5\le 4x-1\le 11\}$ şi $B=\{x\in\mathbb{R}\mid |x-5|<4\}$.

a) Să se scrie A şi B sub formă de intervale.

b) Să se determine $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$.

42. Să se efectueze operaţiile cu intervale:

a) $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cap[-2,2]\cap\left(-\sqrt{5},3\right)$; b) $\left[(-\infty,-1]\cup(6,+\infty)\right]\cap\left[(-3,0)\cup\left(4,\frac{17}{2}\right)\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

43. Se consideră intervalele $I=(-\infty,1]$; $J=[-3,2)$. Să se determine:

a) $I\cup J$; b) $I\cap J$; c) $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}I$; d) $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}J$, unde $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}A$ reprezintă complementara mulţimii A faţă de $\mathbb{R}$.

44. Propoziţia $p\vee q$ este adevărată. Ce valoare de adevăr au propoziţiile p şi q?

45. Propoziţia $p\wedge q$ este falsă. Ce valoare de adevăr au propoziţiile p şi q?

46. Propoziţia $p\to\neg p$ este adevărată. Ce valoare de adevăr are propoziţia p?

47. Să se verifice următoarele echivalenţe de formule de calcul propoziţional:

a) $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$; b) $p\to\neg q\equiv\neg(p\wedge q)$.

48. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei

p: există $x\in\mathbb{Z}$ astfel încât $2x^2+3x-2=0$.

49. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei

q: există $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $|x-4|+|x^2-16|=0$.

50. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei r: oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, $5x-1<0$.

51. Se consideră predicatele unare $p(x)$: 5 divide x, $x\in\mathbb{N}$ şi $q(x)$: ultima cifră a numărului 4^x este 4, $x\in\mathbb{N}$. Să se precizeze valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $p(35)$; b) $q(5)$; c) $p(50)\wedge q(9)$; d) $p(55)\vee q(8)$; e) $p(52)\vee q(11)$.

52. Fie predicatele $p(x)$: $x+1<\frac{3}{2}$, $x\in\mathbb{R}$ şi $q(x)$: $-1\le x-1\le 2$, $x\in\mathbb{R}$. Dacă A şi B sunt respectiv domeniile de adevăr ale predicatelor, care din următoarelor propoziţii sunt adevărate:

a) $A\cap B=\left[0,\frac{1}{2}\right)$; b) $A\cup B=(-\infty,0]$; c) $A\setminus B=(-\infty,0)$..

II. FUNCŢII

2.1. ŞIRURI

Şiruri mărginite

- (a_n) este mărginit dacă există intervalul $[a,b]\subset\mathbb{R}$ astfel încât $a_n\in[a,b],\forall n\in\mathbb{N}^*$.
- (a_n) este mărginit dacă $\exists M>0$, astfel încât $|a_n|\le M,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Şiruri monotone

- (a_n) este monoton crescător dacă $a_n\le a_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$;
- (a_n) este monoton descrescător dacă $a_n\ge a_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$;
- (a_n) este monoton dacă este monoton crescător sau monoton descrescător.

Progresii aritmetice

- Şirul (a_n) este progresie aritmetică dacă $a_n=a_{n-1}+r,\forall n\ge 2\,(r=\text{raţie})$.

Proprietăţi:

a) Formula termenului general: $a_n=a_1+(n-1)\cdot r$;

b) $a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2},k\ge 2$;

c) Dacă $a_1,a_2,...,a_n$ sunt numere în progresie aritmetică, atunci $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=...=a_k+a_{n-k+1}$;

Scanned with OKEN Scanner

d) $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Progresii geometrice

- Şirul (b_n) este progresie geometrică dacă $b_1 \neq 0$ şi $b_n = b_{n-1} \cdot q, \forall n \geq 2, (q = \text{raţie}, q \neq 0)$.

Proprietăţi:

a) Formula termenului general: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 1$;

b) Dacă $b_k > 0$, atunci $b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}, k \geq 2$;

c) Dacă $b_1, b_2, ..., b_n$ sunt n numere în progresie geometrică, atunci $b_1 b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = ... = b_k \cdot b_{n-k+1}$;

d) $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = \begin{cases} \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}, q \neq 1 \\ n \cdot b_1, \quad q = 1 \end{cases}$.

1. Să se calculeze primii trei termeni ai şirurilor de numere reale date prin formula termenului general astfel:

a) $a_n = 2n - 3, n \geq 1$; b) $b_n = \frac{n-2}{n+1}, n \geq 1$;

c) $x_n = \sin\frac{n\pi}{6}, n \geq 1$; d) $y_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$.

2. Să se determine $x_2 + x_3$ ştiind că $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = 5x_n - 2, n \geq \mathbb{N}^*$.

3. Să se determine formula termenului general al şirului definit descriptiv astfel:

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...$; b) $\frac{1^2}{2}, \frac{2^2}{3}, \frac{3^2}{4}, ...$.

4. Se consideră şirul de numere reale (a_n), $a_n = \frac{5n-3}{n+2}, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze $a_1 + a_2 + a_3$.

b) Al câtelea termen al şirului este numărul 4.

5. Se consideră şirul de numere reale (x_n), $x_n = \frac{n^2 + n}{n+3}, n \geq 1$.

a) Să se determine rangul termenului $\frac{52}{5}$.

b) Este termen al şirului (x_n) numărul 8?

6. Să se determine al zecelea termen al şirului 1, 7, 13, 19, 25, ... *(Bacalaureat 2009)*

7. Se consideră progresia aritmetică (a_n) în care $a_3 = 5$ şi $a_6 = 11$. Să se calculeze a_9. *(Bacalaureat 2009)*

8. Se consideră progresia aritmetică (a_n) în care raţia $r = 3$ şi $a_5 = 13$. Să se calculeze a_{2011}.

9. Se consideră progresia aritmetică (a_n). Dacă:

a) $a_1 = 6, a_2 = 5$, să se calculeze S_7; b) $a_2 + a_8 = 48, r = 5$, să se calculeze a_{25}.

10. Să se determine raţia progresiei aritmetice (a_n) ştiind că $a_{10} - a_2 = 16$. *(Bacalaureat 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

11. Să se determine termenul al patrulea al unei progresii aritmetice știind că primul termen este $\frac{5}{2}$ și rația este egală cu $\frac{5}{6}$.

12. Să se determine rația progresiei aritmetice (x_n) știind că termenul al doilea este 10 și termenul al șaptelea este $18\frac{1}{2}$.

13. Să se determine primul termen a_1 și rația r a progresiei aritmetice (a_n) știind că:

a) $\begin{cases} a_5 + a_9 = 26 \\ a_1 - r = \frac{19}{2} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2a_4 - 3a_2 = 1 \\ a_1 \cdot a_2 = 6 \end{cases}$.

14. Să se calculeze sumele:

a) $S = 1+5+9+...+25$;

b) $S = 1+11+21+...+111$;

c) $S = 1+3+5+...+19$; (*Bacalaureat*)

d) $S = 4+1-2-5-8-....-38$.

15. Să se determine primul termen al unei progresii aritmetice cu rația 4, știind că suma primilor doi termeni este 10. (*Bacalaureat 2009*)

16. Să se determine suma primilor 6 termeni ai unei progresii aritmetice (a_n) în care $a_1 = 2$ și $a_2 = 5$. (*Bacalaureat 2009*)

17. Se consideră progresia aritmetică (a_n). Să se calculeze suma primilor 10 termeni știind că:

a) $a_1 = 7$ și $a_7 = 37$;

b) $a_5 = 4$ și $a_{17} = 7$.

18. Să se calculeze S_9 pentru progresia aritmetică (a_n) știind că $a_3 = 18$ și rația $r = \frac{3}{2}$.

19. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ știind că șirul de numere 2, $3x^2 - 2x - 1$, 12, 17,... este progresie aritmetică.

20. Să se determine al patrulea termen al unei progresii geometrice știind că rația este egală cu $\frac{1}{3}$ și primul termen este 27. (*Bacalaureat 2009*)

21. Se consideră preogresia geometrică (b_n) în care $b_1 = 2$ și $b_2 = 6$. Să se calculeze b_5.

22. Într-o progresie geometrică, al doilea termen este 3 și raportul dintre primul termen și al patrulea termen este $\frac{1}{8}$. Să se determine primul termen al progresiei. (*Bacalaureat 2009*)

23. Să se determine rația progresiei geometrice (b_n) știind că $b_1 = 3$ și $b_2 - b_1 = 3$. (*Bac 2009*)

24. Să se calculeze produsul primilor trei termeni ai unei progresii geometrice care are primul temen $\sqrt{2}$ și rația egală cu $-\sqrt{2}$.

25. Să se calculeze sumele:

a) $S = 1+2+2^2+2^3+...+2^7$;

b) $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + ... + \frac{1}{2^{11}}$.

26. Să se determine primul termen și rația progresiei geometric (b_n) știind că $\frac{b_4}{b_1} = 8$ și $S_8 = 255$.

27. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele $x-3$; 4; $x+3$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. (*Bacalaureat 2009*)

28. Să se determine numărul real x știind că numerele $x+1$; $2x-3$ și $x-3$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice. (*Bacalaureat 2009*)

Scanned with OKEN Scanner

29. Să se determine numărul real x știind că șirul $1,\ x,\ x+2,\ 7,\ldots$ este progresie aritmetică. *(Bacalaureat 2009)*

30. Să se determine numărul real x știind că numerele $x-1;\ 2x-2$ și $x+3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. *(Bacalaureat 2009)*

31. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât tripletele de numere să fie în progresie aritmetică:

a) $x^2+2x-1;\ 5x-7;\ 3x-7;$

b) $2x^2-9x-3;\ x^2-3x-2;\ 2x^2-11x+19;$

c) $-2x-1;\ |2x-1|;\ 5+2x;$

d) $\frac{1}{x+2};\ \frac{5x+3}{7x+8};\ \frac{6x+5}{7x+8}.$

32. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ știind că numerele $5-x,\ x+7$ și $3x+11$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice. *(Bacalaureat 2009)*

33. Să se determine numărul real x știind că numerele $x-1,\ x+1$ și $2x+5$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice. *(Bacalaureat 2009)*

34. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât tripletele următoare să fie formate din numere în progresie geometrică:

a) $4x-7;\ 5x-8;\ 7x-10;$

b) $4;\ 2+x;\ x^2+3x+\frac{1}{4};$

c) $\frac{x}{3};\ 3x-4;\ 5x-4;$

d) $x-1;\ \sqrt{9x+6};\ 2x.$

35. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât numerele $\sqrt{x-2},\ \sqrt{x+1}$ și $\sqrt{x+13}$ să fie termeni consecutivi ai unei progresii gemetrice.

36. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel ca numerele $3x-1,\ |3x+2|$ și $24x$ să fie termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

2.2. FUNCȚII. LECTURI GRAFICE

Noțiunea de funcție

• **Funcții egale:**

Dacă $f:A\to B, g:C\to D$, atunci $f=g$, dacă $A=C, B=D$ și $f(x)=g(x), \forall x\in A$.

• **Graficul funcției** $f:A\to B$ este mulțimea $G_f=\{(x,f(x))\,|\,x\in A\}$.

Ecuația $y=f(x), x\in A$ este **ecuația graficului** funcției.

• Dacă $f:A\to\mathbb{R}, g:B\to\mathbb{R}$, unde $B\subset A, B\neq A$ și $g(x)=f(x)$ atunci g este **restricția** funcției f la mulțimea B sau f este **prelungirea** funcției g la mulțimea A.

• Fie $f:E\to F$ și $A\subset E, B\subset F$.

$f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}$ este **imaginea mulțimii** A **prin** f.

$f^{-1}(B)=\{x\in E\,|\,f(x)\in B\}$ este **preimaginea mulțimii** B **prin** f.

Funcții numerice

• Fie $A,B\subseteq\mathbb{R}$. Funcția $f:A\to B$ se numește **funcție numerică** sau **funcție reală de variabilă reală.**

• Se numește reprezentarea geometrică sau grafică a funcției numerice f mulțimea $\mathcal{G}_f=\{M(x,y)\,|\,x\in A, y=f(x)\}$, $\mathcal{G}_f$ este **curba reprezentativă a graficului funcției** sau, prin abuz de limbaj, graficul funcției.

• Intersecția graficului cu axele de coordonate:

Scanned with OKEN Scanner

$G_f \cap Ox = \{M(x,0) \mid f(x) = 0, x \in A\}$; $G_f \cap Oy = \{N(0,y) \mid y = f(0)\}$.

Funţii mărginite.

• Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este mărginită dacă mulţimea valorilor ei este inclusă într-un interval mărginit.

a) f mărginită $\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\operatorname{Im} f \subset [a,b]$;

b) f mărginită $\Leftrightarrow \exists M > 0$ astfel încât $|f(x)| < M, \forall x \in D$;

c) f mărginită dacă graficul este cuprins între două drepte paralele cu axa Ox.

Funcţii pare, funcţii impare.

• Mulţimea $D \subset \mathbb{R}$ se numeşte **simetrică** dacă $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in D$.

• Funcţia numerică $f : D \to \mathbb{R}$ este **funcţie pară** dacă D este mulţime simetrică şi $f(-x) = f(x), \forall x \in D$.

• Funcţia numerică $f : D \to \mathbb{R}$ este **funcţie impară** dacă D este mulţime simetrică şi $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$.

• Dacă f este funcţie pară atunci $\mathcal{G}_f$ este simetric faţă de axa Oy. Dacă f este funcţie impară atunci $\mathcal{G}_f$ este simetric faţă de originea O a reperului cartezian.

• Dreapta $x = a$ este **axă de simetrie** a graficului funcţiei f dacă $f(x) = f(2a - x), x \in D$.

• Punctul $P(a,b)$ este **centrul de simetrie** al graficului funcţiei f dacă $f(x) + f(2a - x) = 2b, \forall x \in D$.

Funcţii periodice.

• Funcţia numerică $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte **funcţie periodică** dacă există $T \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in D$.

• T se numeşte perioadă. Cea mai mică perioadă pozitivă se numeşte **perioadă principală**.
Propoziţie: Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică cu T_0 perioadă principală. Atunci:

a) kT_0 este perioadă, $k \in \mathbb{Z}$;

b) Oricare ar fi perioada T, există $n \in \mathbb{Z}$, astfel încât $T = nT_0$.

Funcţii monotone.

Fie funcţia numerică $f : D \to \mathbb{R}$:

• f este funcţie constantă pe D dacă există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = c, \forall x \in D$;

• f este funcţie crescătoare (strict crescătoare) pe D, dacă $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ (respectiv $f(x_1) < f(x_2)$).

Observaţie

1. f este crescătoare pe $D \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2, \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \ge 0$.

2. f este strict crescătoare pe $D \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$.

• f este funcţie descrescătoare (strict descrescătoare) pe D dacă $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ (respectiv $f(x_1) > f(x_2)$).

Scanned with OKEN Scanner

Observaţii

1. f este descrescătoare pe $D \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2, \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq 0$.

2. f este strict descrescătoare pe $D \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2, \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$.

Operaţii cu funcţii numerice.

• Fie funcţiile numerice $f: A \to \mathbb{R}, g: B \to \mathbb{R}$.

Se definesc funcţiile:

1) $f+g: A \cap B \to \mathbb{R}, (f+g)(x) = f(x)+g(x)$, **(suma funcţiilor);**

2) $f \cdot g: A \cap B \to \mathbb{R}, (fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$, **(produsul funcţiilor);**

3) $\dfrac{f}{g}: A \cap B \setminus \{x \mid g(x)=0\} \to \mathbb{R}, \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, **(câtul funcţiilor).**

• Compunerea funcţiilor

Fie funcţiile $f: A \to B$ şi $g: B \to C$. Se numeşte **compusa funcţiei** g **cu funcţia** f, funcţia notată $g \circ f$ definită astfel:

$g \circ f: A \to C, (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Proprietăţi:

a) Asociativitatea: Pentru funcţiile $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ are loc: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$;

b) Compunerea nu este comutativă $g \circ f \neq g \circ f$.

c) Fie $f: A \to A$ şi $1_A: A \to A, 1_A(x) = x$ (funcţia identică). Atunci $f \circ 1_A = 1_A \circ f = f$ (1_A este element neutru).

1. Se dau mulţimile $A = \{2, 3\}$ şi $B = \{-1, 0, 4\}$.

a) Să se determine mulţimile $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$.

b) Să se reprezinte geometric mulţimile de la punctul a).

2. Să se determine mulţimile A şi B ştiind că:

a) $A \times B = \{(-1, 2), (1, 1), (-1, 0), (-1, 1), (1, 0), (1, 2)\}$;

b) $A \times B = \{(0, 3), (-2, -1), (-2, 3), (0, 0), (-2, 0), (-1, -1), (0, -1), (-1, 0), (-1, 3)\}$.

3. Se dă mulţimea $A = \{1, 2, 4, 6, 7, 9, 0\}$. Câte elemente au muţimile:

a) $B = \{(x, y) \in A \times A \mid x$ este par, y este impar$\}$;

b) $C = \{(x, y) \in A \times A \mid x$ este impar, y este par$\}$.

4. Se consideră mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Să se scrie elementele mulţimii $M = \{(2x, x-4) \mid x \in A\}$.

5. Se consideră mulţimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 5\}$.

Să se scrie elementele mulţimii $B \subset A \times A$, $B = \{(x, y) \mid y = x+3\}$.

6. Să se precizeze cadranul cărui îi aparţine punctul: $A(-2, 3)$; $B(-3, -3)$; $C(4, -1)$; $D(2, 5)$;

Scanned with OKEN Scanner

$E\left(\frac{1}{2},-\frac{4}{7}\right)$; $F\left(-\sqrt{5},\pi\right)$.

7. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel ca punctul $M(2a-1;5)$ să aparţină cadranului al doilea.

8. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $E(-2,3a-6)$ să fie în cadranul al treilea.

9. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel ca punctul $P(2a-4,5-a)$ să fie în cadranul întâi.

10. Să se determine $x\in\mathbb{Z}$ dacă punctul $E(2x+5,4x-11)$ se află în cadranul al patrulea.

11. Să se determine coordonatele punctului $A(5-2x,3-x)$ ştiind că $A\in Ox$.

12. Să se determine coordonatele punctului $B\left(x^2-3x+2,2x\right)$ ştiind că $B\in Oy$.

13. Punctul $P\left(x^2-9,4y-y^2\right)$ reprezintă originea sistemului de axe de coordonate xOy. Să se determine x şi y.

14. Să se determine punctele de pe dreapta de ecuaţie $x=3$ care au ordonata număr natural mai mic decât 4.

15. Să se determine punctele de pe dreapta de ecuaţie $y=-2$ care au abscisa numărul întreg x, cu proprietatea că $|x|\le 2$.

16. Se consideră funcţia $f:\{-1,0,1,2,3,4\}\to\mathbb{R}, f(x)=4x-7$.

a) Să se determine graficul G_f al funcţiei f.

b) Să se reprezinte geometric graficul funcţiei f.

17. Se consideră funcţia $f:\{-3,-2,-1,0,1\}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4$.

a) Să se determine mulţimea valorilor funcţiei f.

b) Să se determine graficul funcţiei f şi să se reprezinte geometric.

18. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}5x+6, & x\in(-\infty,-1]\\ 2, & x\in(-1,1)\\ x^2-3, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$. Să se calculeze suma

$$S=f(-2)-2f(-1)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f(5)+4\left[f(2)+f\left(-\frac{3}{4}\right)\right].$$

19. Fie funcţia $f:\{-4,-3,-2,-1,0\}\to\mathbb{R}, f(x)=mx-2$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că elementul $(-3,4)$ aparţine mulţimii G_f.

20. Se consideră funcţia $f:[-3,5]\to\mathbb{R}, f(x)=-5x+8$ şi punctele $A(-2,18)$, $B\left(\frac{3}{5},5\right)$ şi $C(-4,28)$. Să se determine care dintre aceste puncte sunt situate pe imaginea geometrică a graficului funcţiei f.

21. Să se arate că următoarele funcţii sunt mărginite:

a) $f:\{-2,-1,0,1,2,3\}\to\mathbb{R}, f(x)=-x+4$; b) $f:[-1,3]\to\mathbb{R}, f(x)=3x-2$.

22. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-5$ este nemărginită.

23. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x^4-3}{x^2+2}$ este funcţie pară.

Scanned with OKEN Scanner

24. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-5x$ este funcţie impară.

25. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+5$ are axă de simetrie axa Oy.

26. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$ are centru de simetrie originea sistemului de axe de coordonate.

27. Să se arate că funcţia $f:[-1,8]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-7x+15$ are axă de simetrie dreapta de ecuaţie $x=\dfrac{7}{2}$.

28. Să se arate că punctul $P(-2,3)$ este centru de simetrie pentru funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x-7}{x+2}$.

29. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, f(n)=(-1)^{n+1}$ admite perioadă numărul $T=2$.

30. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(n)=$ ultima cifră a numărului 3^n. Să se determine perioada principală a funcţiei.

31. Se consideră funcţiile $f:\{-5,-3,-1,1,3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+7$ şi $g:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2$. Să se arate că funcţiile f şi g sunt funcţii descrescătoare pe domeniul de definiţie.

32. Se consideră funcţiile $f:\{-3,-2,1,4\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{2}$ şi $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+5$.
Să se demonstreze că cele două funcţii sunt funcţii strict crescătoare pe domeniul de definiţie.

33. Se dau funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+5,\ g(x)=-x+4$.
Să se determine funcţiile $f\circ g,\ g\circ f,\ f\circ f,\ g\circ g$.

34. Se dau funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-3,\ g(x)=x^2-4x$.
Să se determine funcţiile $f\circ g,\ g\circ f,\ f\circ f,\ g\circ g$.

35. Se dau funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x-5, g(x)=3x-8$. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $(f\circ g)(x)=11$; b) $(g\circ f)(x)+35=0$.

36. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx+5$.
Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că $(f\circ f)(-1)=11$.

37. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+2$. Să se rezolve ecuaţia $f(f(x))=f^2(x)$.

38. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2-x, g(x)=3x+2$. Să se expliciteze expresia $(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)$. *(Bacalaureat 2009)*

2.3. FUNCŢIA DE GRADUL I

Definiţii. Graficul funcţie de gradul întâi:

- Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b, a,b\in\mathbb{R}$ se numeşte **funcţie afină.**
- Funcţia afină $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$ şi $a\neq 0, a,b\in\mathbb{R}$ se numeşte **funcţie de gradul întâi.**
- Funcţia afină $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=b, b\in\mathbb{R}$ este **funcţia constantă.**
- Graficul funcţiei constante este o dreaptă paralelă cu Ox dusă prin punctul $A(0,b)\in Oy$.
- Graficul funcţiei de gradul întâi este o dreaptă oblică.

Scanned with OKEN Scanner

• Intersecţia graficului funcţiei de gradul întâi cu axele:

a) $\mathcal{G}_f \cap Ox = \left\{A\left(-\frac{b}{a},0\right)\right\}$; b) $\mathcal{G}_f \cap Oy = \{B(0,b)\}$.

▪ **Monotonia funcţiei de gradul întâi**

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b, a\neq 0$.

a) Dacă $a>0, f$ etse strict crescătoare pe $\mathbb{R}$;

b) Dacă $a<0, f$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗↗↗	b	↗↗↗
$a>0$			

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘↘↘	b	↘↘↘
$a<0$			

Semnul funcţiei de gradul întâi este dat în următorul tabel de semn:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)=ax+b$	Semnul contrar semnului lui a	0	Semnul lui a

▪ **Poziţii relative a două drepte. Sisteme de ecuaţii de gradul I cu două necunoscute.**

$(S)=\begin{cases} ax+b=c;(d_1) \\ m+ny=p;(d_2) \end{cases}$, d_1, d_2 sunt dreptele caracterizate de ecuaţiile sistemului.

• (S) are soluţie unică $\Leftrightarrow d_1\cap d_2\neq\varnothing \Leftrightarrow \frac{a}{m}\neq\frac{b}{n}$;

• (S) are o infinitate de soluţii $\Leftrightarrow d_1=d_2 \Leftrightarrow \frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}$;

• (S) nu are soluţie $\Leftrightarrow d_1 \| d_2 \Leftrightarrow \frac{a}{m}=\frac{b}{n}\neq\frac{c}{p}$.

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$.

Să se determine numerele reale a şi b ştiind că:

a) $3f(x)+2=3x+5, \forall x\in\mathbb{R}$; b) $f(1)+f(2)+f(3)=6a+2b$ şi $f(4)=8$. *(Bac 2009)*

2. Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$ al cărui grafic conţine punctele:

a) $A(2,7); B(-1,-2)$; b) $A(-1,-1); B(1,3)$; c) $A(2,-1); B(-2,7)$; d) $A(2,8); B(-2,4)$.

3. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(2a-3)x+\frac{a-1}{3}$.

Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că punctul $A(1,-8)$ se află pe graficul funcţiei.

4. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că punctul $A(1,-2)$ se află pe graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx+\frac{m+2}{5}$.

5. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b, g(x)=bx+a, a,b\in\mathbb{R}$. Să se arate că dacă $f(-1)=g(-1)$, atunci $f=g$. *(Bacalaureat 2009)*

6. Să se determine punctele de intersecţie cu axele de coordonate a graficelor funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ date prin:

Scanned with OKEN Scanner

a) $f(x)=2x-3$; (*Bac2009*) b) $f(x)=-6x+12$; c) $f(x)=\sqrt{2}x-2$; d) $f(x)=\frac{x}{5}-1$.

7. Să se reprezinte grafic funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ştiind că:

a) $f(x)=x-5$; b) $f(x)=-x+4$; c) $f(x)=3x-9$;

d) $f(x)=0,2x+1$; e) $f(x)=\sqrt{3}x-3$; f) $f(x)=\frac{2}{3}x-4$.

8. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-2$. Care din următoarele puncte aparţin graficului funcţiei: $A(-1,-5)$; $B(1,1)$; $C\left(\frac{1}{3},1\right)$; $D\left(\frac{2}{3},0\right)$?

9. Să se arate că punctul $A\left(\frac{2011}{2010},2\right)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2010x-2009$. (*Bacalaureat 2009*)

10. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-7$. Să se determine punctul de pe grafic care are:

a) ordonata egală cu -1; b) abscisa egală cu 5;

c) coordonatele egale; d) abscisa egală cu opusa ordonatei;

e) ordonata egală cu dublul abscisei.

11. Arătaţi că tripletele de puncte sunt coliniare:

a) $A(-2,0)$, $B(5,7)$, $C(2,4)$; b) $A(1,2)$, $B(0,3)$, $C(3,0)$.

12. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-3$. Să se calculeze suma $f(-6)+f(0)+f(6)+f(12)$. (*Bacalaureat 2009*)

13. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3-2x$.

Să se calculeze $f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(6)$. (*Bacalaureat 2009*)

14. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+3$. Să se calculeze $f(2)+f(2^2)+\ldots+f(2^7)$.

15. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-2x+3$. Să se arate că numerele $f(1), f(0), f(-3)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice. (*Bacalaureat 2009*)

16. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-3$. Să se determine

$f(-4)\cdot f(-3)\cdot\ldots\cdot f(3)\cdot f(4)$. (*Bacalaureat 2009*)

17. Se cosideră funcţiile $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+1$, $g(x)=2x+2$, $h(x)=3x+3$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $a\left[f(x)+h(x)\right]=g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. (*Bacalaureat 2009*)

18. Să se determine mulţimea valorilor funcţiei pentru:

a) $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=-4x+3$; (*Bac. 2009*) b) $g:[-1,3]\to\mathbb{R}, g(x)=x-6$;

c) $h:[-2,2]\to\mathbb{R}, h(x)=\frac{-x+1}{2}$; d) $j:[-5,3]\to\mathbb{R}, j(x)=4x-1$.

19. Să se determine valoarea maximă a funcţiei:

a) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=-2x+3$; (*Bac. 2009*) b) $f:[1,5]\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$.

20. Să se determine valoarea minimă a funcţiei:

a) $f:[-3,4]\to\mathbb{R}, f(x)=-x+3$; (*Bac. 2009*) b) $f:[-4,0]\to\mathbb{R}, f(x)=x+6$.

21. Să se stabilească monotonia funcţiilor de gradul I, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definite prin:

Scanned with OKEN Scanner

a) $f(x)=-3x+5$; b) $f(x)=\frac{2}{5}x$; c) $f(x)=-\sqrt{2}+x$; d) $f(x)=(a^2+1)x+1$.

22. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(2m-6)x+1$ să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

23. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(5-m)x+2$ să fie strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

24. Fi funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3-4x$. Să se determine soluțiile reale ale inecuației $f(x)-1\geq 4x$. *(Bacalaureat 2009)*

25. Să se stabilească semnul funcțiilor de gradul I, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin:

a) $f(x)=3x-9$; b) $f(x)=-5x-10$; c) $f(x)=\frac{1}{4}x+1$; d) $f(x)=-\frac{2}{3}x+4$.

26. Să se rezolve inecuațiile:

a) $5x-7\geq -4x+11$; b) $3x-5\leq 41x+14$; c) $2(x-1)-3x\leq 4$; d) $\frac{2x+3}{3}\leq\frac{x-1}{2}$;

e) $x(x-1)\leq(x+2)(x-4)$; f) $(2x-1)^2\geq(x-1)(4x+1)$; g) $-2\leq 3x-5\leq 4$; h) $-8<5x-3\leq 7$.

27. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\frac{x-2}{x+1}<0$; b) $\frac{3x}{5-x}\geq 0$; c) $\frac{5x}{x-1}>4$; d) $\frac{3x-4}{2x+3}<1$; e) $1<\frac{3x-4}{2x-1}<2$; f) $\frac{2}{x-1}+\frac{5x}{x-1}\geq\frac{3}{2}$.

28. Să se determine $x\in\mathbb{Z}$ astfel încât $-1\leq\frac{x+1}{3}\leq 1$. *(Bacalaureat 2010)*

29. Să se determine punctul de intersecție al dreptelor de ecuație $2x+y-4=0$ și $x+y-3=0$. *(Bacalaureat 2009)*

30. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a dreptelor de ecuații $4x-6y-2=0$ și $2x+3y-7=0$. *(Bacalaureat 2009)*

31. Să se determine soluțiile reale ale sistemului de ecuații:

a) $\begin{cases}x+y=3\\x-y=1\end{cases}$ *(Bacalaureat 2009)* b) $\begin{cases}y=2x+8\\y=5x+2\end{cases}$; c) $\begin{cases}4x-2y=3\\3x+2y=4\end{cases}$; d) $\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y=-1\\8x-2y=0\end{cases}$.

32. Să se determine coordonatele punctului de intersecție dintre graficele funcțiilor $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$, $g(x)=x+3$. *(Bacalaureat 2010)*

2.4. FUNCȚIA DE GRADUL II

Ecuația de gradul doi. Relațiile lui Viete

• Forma generală: $ax^2+bx+c=0, a\neq 0, a,b,c\in\mathbb{R}, \Delta=b^2-4ac$.

Discriminantul	Număr soluții	Mulțimea soluțiilor
1. $\Delta>0$	Două soluții reale, diferite.	$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}, S=\{x_1,x_2\}$
2. $\Delta=0$	Două soluții reale, egale.	$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}, S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
3. $\Delta<0$	Nu există soluții reale	$S=\varnothing$

Scanned with OKEN Scanner

Relații între soluții și coeficienți: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ și $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ (relațiile lui Viete)

- Formarea ecuației când se cunosc soluțiile x_1,x_2 : $x^2-Sx+P=0$, unde $S=x_1+x_2, P=x_1\cdot x_2$.

- Descompunerea în factori a expresiei $ax^2+bx+c, a\neq 0$.

Pentru $\Delta\geq 0\Rightarrow ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

- Semnul soluțiilor ecuației de gradul doi.

$P>0$	$S>0$	$x_1>0, x_2>0$
	$S<0$	$x_1<0, x_2<0$
$P<0$	$S>0$	$x_1<0, x_2>0, \lvert x_1\rvert<x_2$
	$S<0$	$x_1<0, x_2>0, \lvert x_1\rvert>x_2$
	$S=0$	$x_1<0, x_2>0, \lvert x_1\rvert=\lvert x_2\rvert$
$P=0$	$S>0$	$x_1=0, x_2>0$
	$S<0$	$x_1=0, x_2<0$
	$S=0$	$x_1=x_2=0$

Funcția de gradul doi, grafic. Proprietăți

- Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0, a,b,c\in\mathbb{R}$ este funcția de gradul doi.

- $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}$ (forma canonică).

▪ **Maximul sau minimul funcției.**

a) Dacă $a>0, f$ are valoare minimă (minim), $y_{min}=-\frac{\Delta}{4a}$ pentru

$x=-\frac{b}{2a}$. $\operatorname{Im} f=\left[-\frac{\Delta}{4a},+\infty\right)$, $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ este punct de minim al graficului;

b) Dacă $a<0, f$ are valoare maximă(maxim) $y_{max}=-\frac{\Delta}{4a}$ pentru

$x=-\frac{b}{2a}, \operatorname{Im} f=\left(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}\right], V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ este punctul de maxim al graficul.

- Dreapta de ecuație $x=-\frac{b}{2a}$ este **axă de simetrie** a parabolei.

▪ **Intersecția graficului cu axele de coordonate.**

1. $\mathcal{G}_f\cap Ox$: Se rezolvă ecuația $f(x)=0$;

a) $\Delta>0\Rightarrow \mathcal{G}_f\cap Ox=\{A(x_1,0),B(x_2,0)\}$, unde x_1,x_2 sunt soluțiile reale ale ecuației $ax^2+bx+c=0$.

b) $\Delta=0\Rightarrow \mathcal{G}_f\cap Ox=\left\{A\left(-\frac{b}{2a},0\right)\right\}$ (graficul este tangent axei Ox);

c) $\Delta<0\Rightarrow \mathcal{G}_f\cap Ox=\varnothing$ (graficul este deasupra sau sub axa Ox).

Scanned with OKEN Scanner

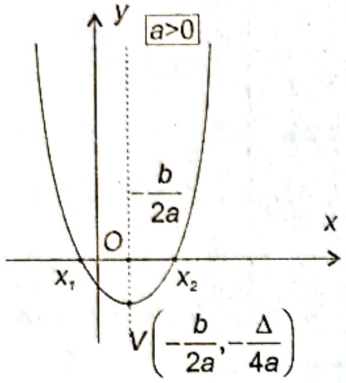
2. $\mathcal{G}_f \cap Oy = \{B(0, f(0))\} = \{B(0,c)\}$.

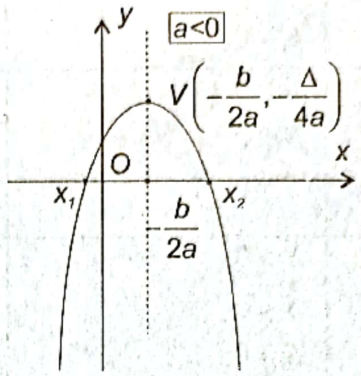
▪ **Reprezentarea grafică.**

Etape:

a) $\mathcal{G}_f \cap Ox, \mathcal{G}_f \cap Oy$; b) $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ vârful graficului;

c) Axa de simetrie: $x = -\frac{b}{2a}$ d) Se reprezintă în planul xOy rezultatele anterioare şi se trasează graficul numit **parabolă**.





▪ **Monotonia funcţiei de gradul doi**

a) $a > 0$, f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ şi strict crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$;

b) $a < 0$, f este strict crescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ şi strict descrescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

▪ **Semnul funcţiei de gradul doi**

a) $\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a	0	semnul contrar semnului lui a	0	semnul lui a

b) $\Delta = 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a	0	semnul lui a

c) $\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a	

Poziţia unei drepte faţă de parabolă.

Fie dreapta d de ecuaţie $y = mx + n$ şi parabola $\mathcal{P}$ de ecuaţie $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0, a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

• O dreaptă intersectează o parabolă în cel mult două puncte.

Coordonatele punctelor de intersecție ale dreptei d și parabolei $\mathcal{P}$ (dacă există) sunt soluțiile sistemului de ecuații (S).

$$(S):\begin{cases} y=mx+n \\ y=ax^2+bx+c \end{cases}.$$

a) Dacă sistemul (S) are două soluții reale, diferite $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ atunci $d\cap\mathcal{P}=\{A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)\}$ și reciproc. Dreapta este **secantă** parabolei.

b) Dacă sistemul (S) are o singură soluție reală (x_1,y_1) atunci $d\cap\mathcal{P}=\{A(x_1,y_1)\}$ și reciproc. Dreapta este **tangentă** parabolei sau este **paralelă cu axa** Oy.

c) Dacă sistemul (S) nu are soluții reale atunci $d\cap\mathcal{P}=\varnothing$ și reciproc. Dreapta este **exterioară** parabolei.

Poziția a două parabole

Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$ și $g(x)=mx^2+nx+p$, $a,m\in\mathbb{R}^*, b,c,n,p\in\mathbb{R}$

$\mathcal{P}_1: y=ax^2+bx+c, \mathcal{P}_2: y=mx^2+nx+p$, sunt parabolele asociate funcțiilor f,g.

Poziția unei parabole față de cealaltă se poate stabili:

• Grafic.

• Rezolvând sistemul $(S):\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=mx^2+nx+p \end{cases}$. Eliminând y, se obține ecuația $(a-m)x^2+(b-n)x+(c-p)=0,(1)$.

a) Dacă $a=m,b=n,c=p$ sistemul (S) are o infinitate de soluții $(x,ax^2+bx+c),x\in\mathbb{R}$ și $\mathcal{P}_1=\mathcal{P}_2$.

b) Dacă $a=m,b=n,c\neq p$, ecuația (1) nu are soluții (sistemul este incompatibil) caz în care $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2=\varnothing$ și parabolele au aceeași axă de simetrie.

c) Dacă $a=m,b\neq n,c\neq p$, ecuația (1) este de gradul 1 și sistemul are soluție unică $(x_1,ax_1^2+bx_1+c)$ caz în care parabolele au un singur punct comun.

d) Dacă $a\neq m$, ecuația (1) este de gradul doi cu discriminantul Δ.

1. Dacă $\Delta>0\Rightarrow(S)$ are două soluții $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ și $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2=\{A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)\}$.

2. Dacă $\Delta=0\Rightarrow(S)$ are soluție unică (x_1,y_1) și $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2=\{A(x_1y_1)\}$.

3. Dacă $\Delta<0\Rightarrow(S)$ este incompatibil și $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2=\varnothing$.

1. Să se determine funcția de gradul doi al cărui grafic conține punctele:

a) $A(1,3), B(0,5), C(-1,11)$; b) $A(1,3), B(-2,0), C(0,-2)$. *(Bacalaureat 2009)*

2. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care punctul $A(m,1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+1$. *(Bacalaureat 2009)*

3. Să se determine $m\in\mathbb{R}^*$ astfel încât graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-x+1$ să conțină punctul $A(2,3)$. *(Bacalaureat 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

4. Să se determine coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dată prin:

a) $f(x)=x^2+4x-5$; *(Bacalaureat 2009)*

b) $f(x)=4x^2-12x+9$; *(Bacalaureat 2009)*

c) $f(x)=-3x^2+4x+4$;

d) $f(x)=x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$.

5. Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$.

Ştiind că $f(0)=8$ şi vârful parabolei asociate funcţiei este punctul $V(3,-1)$.

6. Să se determine funcţia de gradul doi, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-(2m+1)x+3$, $m\in\mathbb{R}$, al cărui grafic are abscisa vârfului egală cu $\frac{7}{2}$. *(Bacalaureat 2009)*

7. Să se determine axa de simetrie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x)=x^2-8x+3$; b) $f(x)=-3x^2+12x+1$; c) $f(x)=\frac{3}{2}x^2-5x$; d) $f(x)=7x^2-9$.

8. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x+2$.

Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(2010)$. *(Bacalaureat 2009)*

9. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-25$.

Să se calculeze $f(-5)\cdot f(-4)\cdot\ldots\cdot f(4)\cdot f(5)$. *(Bacalaureat 2009)*

10. Să se arate că graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-10x+25$ este tangent axei Ox.

11. Să se determine coordonatele punctelor de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x)=x^2-x-6$; b) $f(x)=-x^2+8x-16$; c) $f(x)=2x^2+x-6$; d) $f(x)=x^2-4x+5$.

12. Să se determine coordonatele punctului de intersecţie cu axa Oy a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x)=5x^2-4x-3$; b) $f(x)=-8x^2+2x$; c) $f(x)=4x^2$; d) $f(x)=\frac{3}{5}x^2-\frac{8}{3}x+5$.

13. Să se afle valoarea minimă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ştiind că:

a) $f(x)=x^2-3x+2$; b) $f(x)=4x^2-8x+1$; c) $f(x)=x^2-\sqrt{20}x$.

14. Să se determine valoarea maximă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x)=-x^2+6x-9$; b) $f(x)=-2x^2+8$; c) $f(x)=-4x^2+\sqrt{2}x+1$.

15. Să se determine mulţimea valorilor funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x)=2x^2-6x+1$; b) $f(x)=-3x^2+2x+5$; c) $f(x)=x^2-2\sqrt{10}x+1$.

16. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx^2-8x-3$, $m\in\mathbb{R}^*$. Să se determine m, ştiind că valoarea maximă a funcţiei f este egală cu 5. *(Bacalaureat 2009)*

17. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că valoarea maximă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+2x-m+3$ este egală cu 10. *(Bacalaureat 2009)*

18. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că valoarea minimă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+m-1$ este egală cu $-\frac{1}{4}$. *(Bacalaureat 2009)*

19. Să se determine $m\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ ştiind că abscisa punctului de minim al graficului funcţiei

Scanned with OKEN Scanner

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(m-2)x^2-(m+3)x+1$ este egală cu 3.

20. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2+2x-15=0$; b) $2x^2+5x-3=0$; c) $-2x^2+9x-9=0$;

d) $x^2-10x+25=0$; e) $16x^2-24x+9=0$; f) $-x^2+5x-7=0$;

g) $x(x+3)-3x=1$; h) $(2x+3)^2+8=0$; i) $x^2-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{6}=0$.

21. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x^2-4x+1,\ g(x)=2x-1$.

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $f(x)+2g(x)=-1$. *(Bacalaureat 2009)*

22. Să se demonstreze că dacă $a\in\mathbb{R}^*$ atunci ecuația $ax^2-(2a+1)x+a+1=0$ are două soluții reale distincte. *(Bacalaureat 2009)*

23. Să se arate că mulțimea $\left\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-(2m+1)x+m^2+m=0\right\}$ are două elemente, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$. *(Bacalaureat 2009)*

24. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuațiile următoare să aibă două soluții reale egale;

a) $x^2+mx+9=0$; *(Bacalaureat 2009)* b) $x^2+(m+3)x+m+6=0$.

25. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^2-x+m=0$ să admită soluții de semne contrare.

26. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^2-(2m-6)x-1=0$ să aibă soluțiile numere reale opuse.

27. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^2-(m+3)x-m=0$ să aibă soluții pozitive.

28. Să se determine ecuația de gradul doi ale cărei soluții x_1, x_2 verifică condițiile:

a) $x_1+x_2=2$ și $x_1x_2=-10$; b) $x_1+x_2=-\frac{3}{2}$ și $x_1x_2=\frac{5}{4}$;

c) $x_1+x_2=11$ și $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{11}{30}$; *(Bacalaureat 2009)* d) $x_1+x_2=-2,\ x_1^2+x_2^2=10$.

29. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, știind că soluțiile x_1, x_2 ale ecuației $x^2-mx+m+2=0$ verifică egalitatea $2x_1x_2=x_1+x_2$.

30. Știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-2010x-2010=0$, să se calculeze $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)^2$.

31. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că soluțiile x_1, x_2 ale ecuației $x^2-mx-m-6=0$ verifică relația $4(x_1+x_2)+x_1x_2=0$. *(Bacalaureat 2009)*

32. Să se arate că soluțiile x_1, x_2 ale ecuației $x^2-4x+3=0$ verifică relația $x_1^2+x_2^2=3(x_1+x_2)-2$.

33. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că soluțiile x_1, x_2 ale ecuației $x^2-(m-1)x-m=0$ verifică relația $x_1+x_2=2(x_1x_2+4)$. *(Bacalaureat 2009)*

34. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că soluțiile x_1, x_2 ale ecuației $x^2+(m-1)x+3=0$ verifică relația $x_1=3x_2$. *(Bacalaureat 2009)*

35. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+5x+m+6$.

Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că $f(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. *(Bacalaureat 2009)*

36. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $(a-3)x^2-ax-a<0$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

37. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel ca $x^2-(m-3)x+m-3>0$ pentru oricare $x \in \mathbb{R}$. *(Bac 2009)*

38. Să se arate că $(x-1)(x-2)>x-3$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. *(Bacalaureat 2009)*

39. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi inecuațiile:

a) $x^2-5x+5 \le 1$; *(Bac2009)* b) $(2x-3)\cdot x \le -x+12$; c) $-x^2-6x+16>0$; d) $(5-x)(5+x)>0$.

40. Să se găsească soluțiile reale ale inecuațiilor:

a) $\dfrac{2x+3}{x^2+x+1} \ge 1$; *(Bacalaureat 2009)* b) $\dfrac{2x-1}{x^2-4}-1 \ge 0$; c) $\dfrac{-x^2+3x-2}{x^2+5x+6}>0$.

41. Să se determine mulțimea $A=\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2+x-2<0\}$.

42. Să se arate că soluțiile x_1, x_2 ale ecuației $x^2-2mx+m^2-1=0$ verifică relația $x_1x_2-(x_1+x_2)+2 \ge 0$, pentru oricare $m \in \mathbb{R}$. *(Bacalaureat 2009)*

43. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x+y=-6 \\ xy=8, \quad x,y \in \mathbb{R} \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6, \quad x,y \in \mathbb{R} \end{cases}$. *(Bacalaureat 2009)*

44. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a dreptei de ecuație $y=-4$ cu graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+5$. *(Bacalaureat 2009)*

45. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x-1$, $g(x)=x+4$. *(Bacalaureat 2009)*

46. Să se determine $m \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m+1)x^2-(m+2)x+1$ este tangent axei Ox.

47. Să se arate că oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+m^2+1$ este situată deasupra axei Ox. *(Bacalaureat 2009)*

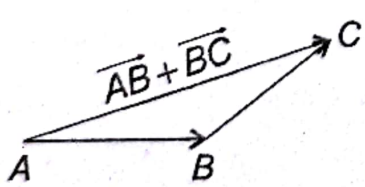
48. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemele de ecuații:

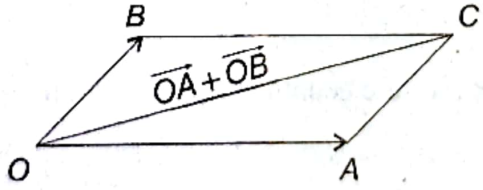
a) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x^2+2x-7=y \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+x=y \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x=y-1 \\ 9x^2-3y=-5 \end{cases}$. *(Bacalaureat 2009)*

III. VECTORI ÎN PLAN

▪ **Adunarea vectorilor**

a) regula triunghiului; b) regula paralelogramului.





$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$

Vectori coliniari.

Fie $\vec{v}$ un vector și $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Vectorul $\alpha\vec{v}$ este vectorul care are aceeași direcție cu $\vec{v}$, $|\alpha\vec{v}|=|\alpha|\cdot|\vec{v}|$, are același sens cu $\vec{v}$ dacă $\alpha>0$ și are sens opus cu $\vec{v}$ dacă $\alpha<0$.

- $\vec{v}$ și $a\vec{v}$ sunt vectori coliniari;
- $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca $\vec{u}=\alpha\cdot\vec{v}$;

Scanned with OKEN Scanner

- $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}$;
- $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt necoliniari $\Leftrightarrow$ din egalitatea $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow \Rightarrow \alpha=\beta=0$;
- $\alpha\vec{v}=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ sau $\vec{v}=\vec{0}$;

Punctele A,B,C sunt coliniare $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt vectori coliniari $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AB}=\alpha \cdot \overrightarrow{BC}$.

- Un reper **cartezian în plan** este definit de o pereche de axe perpendiculare cu aceeaşi origine.

Notaţie: xOy sau $(O,\vec{i},\vec{j})$, $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ fiind versorii axelor Ox, Oy.

- Dacă $M(x,y)$, atunci $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ (descompunerea vectorului după direcţiile versorilor $\vec{i}$ şi $\vec{j}$); x,y sunt coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$.
- Dacă $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ atunci $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}$, iar (x_2-x_1) şi (y_2-y_1) sunt **cordonatele vectorului** $\overrightarrow{AB}$.
- $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.
- Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$, atunci $M\left(\frac{x_1+y_1}{2},\frac{x_2+y_2}{2}\right)$.
- Vectorii $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}, \vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$.
- A,B,C sunt puncte coliniare dacă există a,b,c nu toate nule astfel încât $a+b+c=0$ şi
- $a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.
- A,B,C sunt coliniare dacă $\exists k \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{OC}=k\cdot\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}$.
- Expresia analitică a operaţiilor cu vectori.

Fie vectorii $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ şi $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$:

a) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1)\vec{i}+(a_2+b_2)\vec{j}$;

b) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1)\vec{i}+(a_2-b_2)\vec{j}$;

c) $\alpha\cdot\vec{a}=\alpha a_1\vec{i}+\alpha a_2\vec{j}$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$;

d) $\left|\vec{a}\right|=\left|a_1\vec{i}+a_2\vec{j}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

- **Produsul scalar al vectorilor** $\vec{a},\vec{b}$ este: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$

Proprietăţi:

- $\vec{a}\cdot\vec{b}\in\mathbb{R}$ $\quad \vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$; $\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$; $\quad \vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\vec{b}=0$; $\quad (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$

Exprimarea analitică a produsului scalar.

Dacă $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}, \vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$, atunci $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2, \cos\alpha=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$.

Vectorul de poziţie al unui punct în plan

- Fie O un punct în planul $\mathcal{P}$. Dacă $A\in\mathcal{P}$ atunci $\overrightarrow{OA}$ este **vectorul de poziţie al punctului** A.

Notaţie: $\overrightarrow{OA}=\vec{r}_A$.

- Fie $A,B\in\mathcal{P}$ şi M mijlocul segmentului $[AB]$. Atunci $\vec{r}_M=\frac{1}{2}(\vec{r}_A+\vec{r}_B)$.

Scanned with OKEN Scanner

• Vectorul de poziţie al punctului M care împarte segmentul $[AB]$ în raportul $k=\frac{AM}{MB}$ este:

$\vec{r}=\frac{1}{k+1}\cdot\left(\vec{r}_A+k\vec{r}_B\right)$.

• Centrul de greutate al triunghiului ABC este punctul G cu proprietatea $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

• Vectorul de poziţie al centrului de greutate G al triunghiului ABC: $\vec{r}_G=\frac{1}{3}\cdot\left(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C\right)$.

Pentru orice punct $M\in\mathcal{P}$ are loc: $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+...+\overrightarrow{MA_n}=n\overrightarrow{MG}$ (relaţia lui Leibniz).

1. Fie triunghiul ABC şi M mijlocul segmentului $[BC]$. Să se arate că $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

2. În triunghiul ABC punctul M este mijlocul laturii $[BC]$. Să se arate că $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}$.

3. În triunghiul ABC punctele M,N,P sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, respectiv $[AC]$. Să se arate că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AN}$. *(Bacalaureat 2009)*

4. Fie ABC un triunghi echilateral înscris în cercul cu centru O. Să se determine vectorul $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AO}$. *(Bacalaureat 2009)*

5. Triunghiul echilateral ABC este înscris în cercul de centru O. Să se arate că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

6. Să se demonstreze că în patrulaterul $ABCD$ ar loc relaţia $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

7. În patrulaterul $ABCD$ are loc relaţia $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$. Să se arate că $ABCD$ este paralelogram.

8. Fie $ABCD$ un paralelogram. Să se arate că $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\cdot\overrightarrow{AD}$.

9. Fie triunghiul ABC şi M, N, P mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ iar O un punct în plan. Să se arate că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

10. Se consideră pătratul $ABCD$ şi O centrul său.
Să se calculeze $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$. *(Bacalaureat 2009)*

11. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat. Să se arate că $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=3\cdot\overrightarrow{BC}$.

12. Se consideră triunghiul ABC şi punctele D şi E astfel încât $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EC}$. Să se arate că dreptele BC şi DE sunt paralele.

13. Fie triunghiul ABC şi $M\in(BC)$ astfel încât $BC=3\cdot BM$.
Să se arate că $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$.

14. Fie ABC un triunghi şi G centrul de greutate. Se consideră punctul P astfel încât $\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{CP}$. Să se arate că dreptele AC şi GP sunt paralele.

15. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC şi $GM\parallel BC$, $M\in(AC)$. Să se determine $k\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{GM}=k\cdot\overrightarrow{BC}$.

16. Pe laturile (AB) şi (AC) ale triunghiului ABC se iau punctele M şi N astfel încât $\overrightarrow{AM}=3\cdot\overrightarrow{MB}$ şi $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AC}$. Să se arate că vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt vectori coliniari.

Scanned with OKEN Scanner

17. Fie triunghiul ABC. Să se determine $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $3 \cdot \overrightarrow{BC} + 3 \cdot \overrightarrow{CA} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.

18. Fie punctele $A(3,-5)$, $B(2,-1)$. Să se determine numerele reale a și b știind că $\overrightarrow{AB} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$.

19. Se consideră punctele $A(-2,3)$, $B(5,-1)$, $C(-4,0)$.

a) Să se determine coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

b) Să se determine coordonatele vectorului $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.

20. Să se determine coordonatele punctului A știind că $B(4,-2)$ și $\overrightarrow{AB} = -5 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}$.

21. În reperul $(O, \vec{i}, \vec{j})$ se consideră vectorii $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v} = 5\vec{i} - \vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $5\vec{u} + 3\vec{v}$. *(Bacalaureat 2009)*

22. În reperul cartezian xOy se dau vectorii $\overrightarrow{OA}(2,-3)$ și $\overrightarrow{OB}(1,-2)$. Să se determine numerele reale α, β pentru care vectorul $3\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OB}$ are coordonatele (α, β). *(Bacalaureat 2009)*

23. Se consideră punctele $A(1,-2)$, $B(-6,-8)$. Să se determine:

a) vectorii de poziție ai punctelor A și B;

b) vectorul de poziție al mijlocului segmentului $[AB]$.

24. În reperul cartezian xOy se iau punctele $A(2,0)$, $B(1,-1)$. Să se determine coordonatele punctului C din plan astfel încât $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$. *(Bacalaureat 2010)*

25. Să se determine coordonatele punctului M, mijlocul segmentului $[AB]$, știind că $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\overrightarrow{OB} = 7\vec{i} + 2\vec{j}$. *(Bacalaureat 2009)*

26. În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}(4,-5)$, $\overrightarrow{OB}(-6,-3)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$, unde M este mijlocul segmentului $[AB]$.

27. Se consideră punctele $A(1,-1)$, $B(4,-5)$, $C(8,0)$.

Să se determine modulele vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{CB}$.

28. Să se determine numărul $a \in \mathbb{R}$ știind că vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + a\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} + (a-2)\vec{j}$ sunt coliniari. *(Bacalaureat 2009)*

29. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că vectorii $\vec{u} = 4\vec{i} + (a+3)\vec{j}$ și $\vec{v} = (a-1)\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt coliniari.

30. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(3,3)$, $B(2,4)$, $C(2m, 1-m)$ să fie coliniare. *(Bacalaureat 2009)*

31. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât:

a) vectorii $\vec{a} = (m+2)\vec{i} - 4\vec{j}$ și $\vec{b} = m\vec{i} - 8\vec{j}$ să fie coliniari;

b) vectorii $\vec{u} = (m-4)\vec{i} + (2m-3)\vec{j}$ și $\vec{v} = (m+3)\vec{i} + (2m+1)\vec{j}$ să aibă același modul.

32. Se consideră punctele $A(6,-4)$, $B\left(\frac{2}{3}, 4\right)$ și $C\left(\frac{7}{3}, -3\right)$. Să se determine vectorul de poziție al centrului de greutate al triunghiului.

33. Fie $r_A = 2\vec{i} + \vec{j}$, $r_B = \vec{i} + 3\vec{j}$ și $r_C = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ vectorii de poziție ai vârfurilor triunghiului ABC. Să se determine:

a) vectorul de poziție al centrului de greutate al triunghiului ABC;

Scanned with OKEN Scanner

b) vectorul de poziţie al mijlocului M al segmentului $[AB]$.

34. Se consideră punctele $A(m-1,m)$, $B(8,-5)$ şi $C(m-3,n+1)$. Să se determine numerele reale m şi n astfel încât vectorul de poziţie al centrului de greutate al triunghiului ABC să fie vectorul nul.

35. Se consideră punctele $A(2,2)$, $B(-2,-4)$, $C(6,0)$ şi $M\in[BC]$ astfel încât $\frac{BM}{MC}=\frac{3}{4}$. Să se determine vectorul $\overline{AM}$.

36. Fie triunghiul ABC şi punctele $M\in(AB)$, $N\in(AC)$ astfel încât vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari. Dacă $AM=4$, $BM=m$, $AN=m^2$ şi $CN=16$, să se determine $m\in\mathbb{N}^*$.

IV. TRIGONOMETRIE ŞI APLICAŢII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE

Funcţii trigonometrice

- Funcţiile sinus şi cosinus: $\sin:\mathbb{R}\to[-1,1],\cos:\mathbb{R}\to[-1,1]$.
- Funcţiile tangentă şi cotangentă: $\operatorname{tg}:\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R},\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$,

$\operatorname{ctg}:\mathbb{R}\setminus\{k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$, $\operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$.

Proprietăţi:

1. Periodicitatea

a) Funcţiile sinus, cosinus sunt periodice cu perioada principală $T_0=2\pi$.

$\sin(x+2\pi)=\sin x$; $\cos(x+2\pi)=\cos x$;

$\sin(x+2k\pi)=\sin x, x\in\mathbb{R}$; $\cos(x+2k\pi)=\cos x, x\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z}$

b) Funcţiile tangentă, cotangentă sunt periodice cu $T_0=\pi$:

$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg}x,\ \operatorname{tg}(x+k\pi)=\operatorname{tg}x, x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg}x,\ \operatorname{ctg}(x+k\pi)=\operatorname{ctg}x, x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

2. Mărginire

a) Funcţiile sinus şi cosinus sunt **mărginite**: $\sin x\in[-1,1],\cos x\in[-1,1],\forall x\in\mathbb{R}$.;

b) Funcţiile tangentă şi cotangetă sunt nemărginite.

3. Semnul funcţiilor trigonometrice

	Cadranul I $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	Cadranul II $t\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$	Cadranul III $t\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$	Cadranul IV $t\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$
$\sin t$	+	+	−	−
$\cos t$	+	−	−	+
$\operatorname{tg}t$	+	−	+	−
$\operatorname{ctg}t$	+	−	+	−

Dacă $t\in\mathbb{R}$, atunci $t=2\pi\left[\frac{t}{2\pi}\right]+t_0, t_0\in[0,2\pi)$ şi pentru stabilirea semnului se foloseşte periodicitatea.

Scanned with OKEN Scanner

1. Paritatea, imparitatea

a) Funcţiile sin, tg şi ctg sunt **impare**

$\sin(-x) = -\sin x, x \in \mathbb{R}$ $\quad tg(-x) = -tgx, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad ctg(-x) = -ctgx, x \neq k\pi.$

b) Funcţia *cosinus* este **pară**: $\cos(-x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$.

2. Funcţiile trigonometrice nu sunt monotone pe domeniul de definiţie.

Relaţii între funcţiile trigonometrice ale aceluiaşi argument

- Formula fundamentală: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

	$\sin x$	$\cos x$	tgx	$ctgx$
$\sin x =$	$\sin x$	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{tgx}{\pm\sqrt{1+tg^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2 x}}$
$\cos x =$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2 x}}$	$\frac{ctgx}{\pm\sqrt{1+ctg^2 x}}$
$tgx =$	$\frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tgx	$\frac{1}{ctgx}$
$ctgx =$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{tgx}$	$ctgx$

Observaţie: Se alege semnul + sau semnul − în funcţie de semnul funcţiei trigonometrice în cadranul în care se află x.

- $\sin(180° - x) = \sin x;$
- $\cos(180° - x) = -\cos x;$
- $tg(180° - x) = -tgx;$
- $ctg(180° - x) = -ctgx.$

Funcţiile trigonometrice ale sumei şi diferenţei

În condiţiile adecvate de existenţă au loc relaţiile:

- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a;$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a;$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b;$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b;$

▪ **Formule de dedublare:**

- $\sin 2a = 2\sin a \cos a;$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a;$
- $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1;$
- $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a;$

Relaţii în triunghiul dreptunghic

Fie triunghiul ABC, $m(A) = 90°, BC = a, AC = b, AB = c$

a) Teorema lui Pitagora: $a^2 = b^2 + c^2$.

b) Teorema înălţimii: $AD^2 = BD \cdot DC; AD \perp BC$

c) Teorema catetei: $AB^2 = BD \cdot BC; AC^2 = CD \cdot BC$

d) $\sin B = \frac{b}{a}, \cos B = \frac{c}{a}, tgB = \frac{b}{c}, ctgB = \frac{c}{b}.$

e) $A_{(ABC)} = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{a \cdot AD}{2}, AD \perp BC.$

Scanned with OKEN Scanner

Fie triunghiul oarecare ABC, $BC=a, AC=b, AB=c$

a) Teorema sinusurilor: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$, (unde R este raza cercului circumscris triunghiului).

b) Teorema cosinusului: $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A; b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B;$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C.$

c) Teorema medianei: $AM^2=\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$, unde M este mijlocul segmentului $[BC]$.

d) Formule pentru aria triunghiului ABC:

- $A_{(ABC)}=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}$, ($h_a, h_b, h_c$ = înălțimi).
- $A_{(ABC)}=\frac{b\cdot c\cdot\sin A}{2}=\frac{a\cdot c\cdot\sin B}{2}=\frac{a\cdot b\cdot\sin C}{2}$.
- $A_{(ABC)}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, p=\frac{a+b+c}{2}$, (formula lui Heron).

1. Să se calculeze lungimile catetelor triunghiului ABC, știind că $m\left(\hat{A}\right)=90°$, $m\left(\hat{B}\right)=60°$ și lungimea ipotenuzei este egală cu 8. *(Bacalaureat 2009)*

2. Să se determine lungimile catetelor triunghiului ABC știind că $m\left(\hat{A}\right)=90°$, $\sin B=\frac{3}{5}$ și $BC=15$. *(Bacalaureat 2009)*

3. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m\left(\hat{A}\right)=90°$ și $\cos B=\frac{3}{5}$. Să se calculeze $\sin C$.

4. Știind că triunghiul ABC are $BC=10$, $AC=5$ și $AB=5\sqrt{3}$, să se calculeze $\cos A$. *(Bacalaureat 2009)*

5. Fie ABC triunghi dreptunghic și D mijlocul ipotenuzei $[BC]$. Știind că $AC=16$ și $AD=10$, să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=3$; $AC=4$; $BC=5$.

a) Să se calculeze $\cos B+\sin B$.

b) Să se calculeze lungimea înălțimii din A.

7. Să se calculeze aria unui triunghi dreptunghic care are un unghi de măsură 30° și ipotenuza de lungime 10.

8. Să se calculeze lungimea laturii $[BC]$ a triunghiului ABC știind că $m\left(\hat{A}\right)=90°$, $m\left(\hat{B}\right)=30°$ și $AB=4\sqrt{3}$. *(Bacalaureat 2009)*

9. Să se determine lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic dacă suma lor este 23, iar aria este 60. *(Bacalaureat 2009)*

10. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu $m\left(\hat{A}\right)=90°$. Să se arate că:

a) $\sin^2 B+\sin^2 C=1$; b) $\sin B+\cos B=\frac{AB+AC}{BC}$;

c) $AD^2=AB\cdot AC\cdot\sin B\cdot\sin C$, unde $AD\perp BC$ și $D\in[BC]$.

Scanned with OKEN Scanner

11. Să se calculeze $\cos x$, știind că $\sin x = \frac{4}{5}$ și x este măsura unui unghi ascuțit. (*Bac 2010*)

12. Să se determine probabilitatea ca alegând un element din mulțimea $A = \{\sin 30°,\ \sin 45°,\ \sin 60°\}$ acesta să fie număr rațional. (*Bacalaureat 2009*)

13. Să se determine $\cos(180° - x)$ știind că $x \in (0°, 90°)$ și $\cos x = \frac{2}{3}$.

14. Să se calculeze:

a) $\sin 60° - \cos 30°$;

b) $\cos 145° + \cos 35°$; (*Bacalaureat 2010*)

c) $\sin 20° - \cos 70°$;

d) $\sqrt{3}\sin 60° - \sqrt{2}\cos 45°$;

e) $\sin^2 130 + \cos^2 50°$;

f) $\cos^2 45° + \sin^2 135°$;

g) $\sin^2 150° + \cos^2 30°$;

h) $\sin^2 80° + \sin^2 10°$.

15. Să se calculeze:

a) $\cos 30° + \cos 60° + \cos 120° + \cos 150°$;

b) $\sin 100° + \cos 100° + \sin 80° + \cos 80°$;

c) $\cos 10° + \cos 20° + \cos 160° + \cos 170°$. (*Bacalaureat 2009*)

16. Să se demonstreze că expresia $(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin x \cos x$ este constantă pentru orice număr real x. (*Bacalaureat 2009*)

17. Să se arate că pentru orice unghi ascuțit x este adevărată egalitatea:

$\sin x \cdot \cos(90 - x) + \cos^2(180° - x) = 1$. (*Bacalaureat 2009*)

18. Să se calculeze:

a) $(\cos 150° + \cos 30°)(\sin 120° - \sin 60°)$;

b) $\operatorname{tg}^2 30° + \operatorname{tg}^2 60° + \operatorname{ctg}^2 45° + \operatorname{tg}^2 0°$;

c) $(\cos 1° - \cos 9°)(\cos 2° - \cos 8°)\cdot \ldots \cdot (\cos 9° - \cos 1°)$. (*Bacalaureat 2009*)

19. Să se calculeze $\sin(180° - x)$ știind că $\sin x = \frac{4}{5}$. (*Bacalaureat 2009*)

20. Să se calculeze $\cos(180° - x)$ știind că $\cos x = \frac{2}{3}$. (*Bacalaureat 2009*)

21. Știind că $\sin 75° - \cos 75° = a$, să se calculeze valoarea expresiei $\sin 105° + \cos 105° - a$.

22. Să se calculeze valoarea expresiei

$E = (\sin 135° + \operatorname{tg} 45° - \cos 45°)\cdot(\operatorname{tg}\ 60° - \operatorname{ctg} 30° + 2\sin 30°)$.

23. Să se calculeze lungimea laturii $[AC]$ a triunghiului ABC știind că $B = 45°$, $C = 30°$ și $AB = 10$. (*Bacalaureat 2009*)

24. În triunghiul ABC, $m(\hat{C}) = 60°$, $AB = 4$ și $BC = 2$. Să se calculeze $\sin A$. (*Bacalaureat 2009*)

25. Fie triunghiul ABC ascuțitunghic. Să se determine $m(\hat{A})$ știind că $BC = 6$ și raza cercului circumscris triunghiului este egală cu $2\sqrt{3}$. (*Bacalaureat 2009*)

26. Să se calculeze $\sin A$ în triunghiul ABC, știind că $BC = 10$, iar raza cercului circumscris triunghiului este egală cu 10. (*Bacalaureat 2009*)

27. Să se calculeze lungimea laturii $[BC]$ a triunghiului ABC știind că $m(\hat{A}) = 30°$ și că raza cercului circumscris triunghiului este egală cu 18.

28. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC știind că:

a) $AB = 6$, $m(\hat{C}) = 30°$; (*Bacalaureat 2010*) b) $BC = 8$, $m(\hat{A}) = 45°$; (*Bacalaureat 2009*)

Scanned with OKEN Scanner

c) $AC=16,\ \cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

29. Să se calcuelze lungimea laturii BC a triunghiului ABC știind că raza cercului circumscris este $\sqrt{12}$ și $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

30. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC știind că:

a) $AB=2,\ BC=4$ și $m(\sphericalangle B)=60^\circ$; *(Bacalaureat 2009)*

b) $AC=4,\ AB=5$ și $m(\sphericalangle A)=60^\circ$; *(Bacalaureat 2009)*

c) $BC=10,\ AC=6$ și $m(\sphericalangle C)=120^\circ$.

31. În triunghiul ABC, se cunosc $AB=AC=6$ și $BC=6\sqrt{3}$. Să se calculeze $\cos B$. *(Bacalaureat 2009)*

32. Să se calculeze $\sin B$ în triunghiul ABC știind că $AB=10,\ BC=15$ și $AC=5\sqrt{7}$.

33. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=5,\ AC=6,\ BC=7$.
Să se calculeze $\cos A$. *(Bacalaureat 2009)*

34. Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că:

a) $AC=2,\ m(\widehat{BAC})=30^\circ$ și $AB=4$; *(Bacalaureat 2009)*

b) $AB=8,\ AC=4,\ m(\widehat{BAC})=45^\circ$; *(Bacalaureat 2009)*

c) $AB=BC=6$ și $m(\widehat{ABC})=120^\circ$. *(Bacalaureat 2009)*

35. Se consideră triunghiul ABC cu aria egală cu 15.
Să se calculeze $\sin A$ știind că $AB=6$ și $AC=10$. *(Bacalaureat 2009)*

36. Să se calculeze aria triunghiului echilateral care are:

a) perimetru egal cu 6;

b) lungimea înălțimii egală cu $3\sqrt{3}$. *(Bacalaureat 2009)*

37. Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că:

a) $AB=3,\ AC=4,\ BC=5$; b) $AB=6,\ BC=10,\ AC=14$.

38. Să se calculeze aria paralelogramului $ABCD$ știind că:

a) $AB=3,\ AD=\sqrt{3}$ și $m(\widehat{BAD})=120^\circ$; b) $AB=8,\ BC=10$ și $m(\widehat{BCD})=150^\circ$;

(Bacalaureat 2009)

c) $AC=10,\ m(\widehat{BAC})=30^\circ$ și $m(\widehat{ABC})=90^\circ$; d) $AB=6\sqrt{3},\ AD=4$ și $m(\widehat{DAB})=150^\circ$.

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII RECAPITULATIVE
CLASA A X-A

I. Mulţimi de numere

1.1. Mulţimea numerelor reale.
1.2. Mulţimea numerelor complexe.

II. Funcţii şi ecuaţii

III. Probleme de numărare

IV. Elemente de statistică şi probabilităţi

V. Geometrie

Scanned with OKEN Scanner

I. MULŢIMI DE NUMERE

1.1. Mulţimea numerelor reale.

Radicalul de ordinul n, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

Proprietăţi:

În condiţiile de existenţă a radicalilor au loc relaţiile:

a) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; b) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; c) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$; d) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;

e) $\sqrt[n]{a^{mn} \cdot b} = a^m \sqrt[n]{b}, a \geq 0$; f) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$ (amplificare),

g) Compararea radicalilor. $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ (simplificare);

Dacă $a, b \in [0, +\infty)$ atunci $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a \leq b$.

- **Raţionalizarea numitorilor.**

- **Expresiile conjugate** sunt expresiile al căror produs nu conţine radicali.
- Pentru a raţionaliza o fracţie se amplifică fracţia cu expresia conjugată a numitorului.

a) Numitor de forma $\sqrt[n]{a^k}, a > 0, k < n$. Se amplifică cu $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ şi se obţine $\sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}} = a$.

b) Numitor de forma $\left(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}\right)$. Se foloseşte formula: $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$.

c) Numitori de forma $\left(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}\right)$ sau $\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$.

Se folosesc formulele $\left(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) = a \pm b$.

Logaritmul unui număr real pozitiv

- Fie $a > 0, a \neq 1, y > 0$, $\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y, a^{\log_a y} = y$.
- Proprietăţi. Operaţii cu logaritmi.

a) $\log_a a^n = n$, $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$; b) $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$;

c) $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$; d) $\log_a x^k = k \log_a x$;

e) $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ (Formula de schimbare a bazei logaritmului);

f) $\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x$.

1. Să se arate că numărul:

a) $\sqrt{1+3+5+...+21}$ este număr natural; b) $\sqrt[3]{27} - \sqrt{12} + 2\sqrt{3}$ este număr întreg;

c) $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(1-\sqrt{2}\right)^2$ este număr natural. (*Bacalaureat 2009*)

2. Să se comparare numerele:

a) $a = \sqrt{2}$ şi $b = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; (*Bacalaureat 2009*) b) $a = \sqrt{3}$ şi $b = \sqrt[3]{5}$.

3. Să se ordoneze crescător numerele:

Scanned with OKEN Scanner

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$; 64 şi $\sqrt[3]{8}$; (*Bacalaureat 2009*) b) 5; $\sqrt[3]{100}$; $\left(\frac{2}{9}\right)^{-1}$.

4. Să se raţionalizeze numitorii fracţiilor:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; b) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

5. Să se calculeze:

a) $\sqrt[3]{9}-\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$; (*Bacalaureat 2009*) b) $\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{9^6}+\sqrt[3]{125}$; c) $\frac{1}{5}\cdot\sqrt[3]{5^4}$.

6. Să se determine $n\in\mathbb{N}$ pentru care expresia $E(n)=\sqrt{10-3n}$ este bine definită. (*Bac 2009*)

7. Să se scrie ca putere cu exponent raţional numărul:

a) $\sqrt{6}$; b) $\sqrt[3]{4}$; c) $8\sqrt{8}$; d) $\frac{\sqrt[3]{729}}{3}$.

8. Să se scrie cu ajutorul radicalului numerele:

a) $4^{\frac{1}{2}}$; b) $3^{\frac{2}{3}}$; c) $\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{1}{3}}$; d) $(0{,}25)^{\frac{3}{2}}$.

9. Să se efectueze: a) $3^{\frac{3}{2}}\cdot 27^{\frac{1}{2}}$; b) $256^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{64^{\frac{2}{3}}}$; c) $\left(2^3\right)^{\frac{4}{3}}:4^2$.

10. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care este definită expresia:

a) $\sqrt{2x-x^2}$; b) $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2-4}}$; c) $\sqrt{\frac{1}{x+3}}-\sqrt[3]{x-2}$.

11. Să se determine media aritmetică şi media geometrică a numerelor $a=2$, $b=12$, $c=9$.

12. Să se compare numerele:

a) 2^2 şi $\log_2 32$; (*Bacalaureat 2009*) b) $\log_2\frac{1}{16}$ şi $\sqrt[3]{-27}$.

13. Să se arate că:

a) $\log_2 3\in(1,2)$; b) $\log_3 4<2<\sqrt{5}$; c) $\log_2 4+\log_3 9<\sqrt{36}$. (*Bacalaureat 2009*)

14. Să se calculeze:

a) $\log_3 27-\log_2 8$; b) $\log_5 25-\lg 100$;

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}-\log_7 49$; d) $\log_2\left(3+\sqrt{5}\right)+\log_2\left(3-\sqrt{5}\right)$. (*Bacalaureat 2010*)

15. Să se calculeze:

a) $\log_6 24-\log_6 4$; b) $2\log_3 4-4\log_3 2$; c) $\log_5 10+\log_5 3-\log_5 6$;

d) $\lg 20+\lg 3-\lg 6$; e) $\log_6 3+\log_6 10-\log_6 5$; f) $\frac{\log_5 18-\log_5 2}{\log_5 3}$. (*Bacalaureat 2009*)

16. Să se arate că:

a) $\log_2 14+\log_2 3-\log_2 6=\log_2 7$; (*Bacalaureat 2009*)

b) $\log_5 125+(0{,}2)^{-1}-\sqrt[3]{125}=\lg 1000$; c) $\log_2 5+\log_2 12-\log_2 30=1$. (*Bacalaureat 2009*)

17. Ştiind că $\log_3 2=a$ să se verifice dacă $\log_3 8+\log_3 100-\log_3 25=5a$. (*Bacalaureat 2009*)

18. Se consideră numărul $a=\log_2 3$. Să se arate că $\log_2 18=2a+1$. (*Bacalaureat 2009*)

19. Să se arate că $\log_3 24=1+3a$, unde $a=\log_3 2$. (*Bacalaureat 2009*)

Scanned with OKEN Scanner

20. Să se exprime în funcție de $a=\log_2 5$ numărul: a) $\log_8 80$; b) $\log_{100} 20$.

21. Să se arate că:

a) $\lg\frac{1}{2}+\lg\frac{2}{3}+...+\lg\frac{9}{10}=-1$; *(Bacalaureat 2009)*

b) numărul $A=\log_3\frac{2}{1}+\log_3\frac{3}{2}+\log_3\frac{4}{3}+...+\log_3\frac{9}{8}$ este număr natural. *(Bacalaureat 2009)*

22. Să se arate că numerele 1, $\log_3 9$ și $\sqrt[3]{64}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice. *(Bacalaureat 2009)*

23. Să se arate că numerele $\log_{12} 6$, 1 și $\log_{12} 24$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

24. Să se determine valorile reale ale lui x pentru care sunt definiți logaritmii:

a) $\log_2(x-4)$; b) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+1)$; c) $\log_{x+2} 5$;

d) $\log_3(x^2-5x+4)$; e) $\log_4(9-x^2)$; f) $\log_6\frac{x-5}{1-x}$.

1.2. Mulțimea numerelor complexe.

Forma algebrică . Operații

- Forma algebrică a numărului complex: $z=a+bi, a,b\in\mathbb{R}$, unde $i^2=-1, a=\text{Re}(z), b=\text{Im}(z)$, i este unitatea imaginară $\mathbb{C}=\{z=a+bi \mid a,b\in\mathbb{R}, i^2=-1\}$ este mulțimea numerelor complexe.
- $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c, b=d$.
- **Adunarea:** $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.
- **Scăderea:** $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.

Dacă $z\in\mathbb{C}\Rightarrow -z$ este **opusul** lui z și $z+(-z)=-z+z=0$.

- **Înmulțirea:** $(a+bi)(c+di)=ac-bd+i(ad+bc)$.
- **Puterile naturale ale lui** i: $i^{4k}=1, i^{4k+1}=i, i^{4k+2}=-1, i^{4k+3}=-i$, unde $k\in\mathbb{N}$.

Numere complexe conjugate. Modul

- Fie $z=a+bi\in\mathbb{C}$. Numărul $\bar{z}=a-bi$ este **conjugatul** lui z.
- **Proprietăți corelate cu operații**

a) $z+\bar{z}\in\mathbb{R}, z\cdot\bar{z}\in\mathbb{R}$; b) $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}$;

c) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$; d) $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2; \overline{(z^n)}=(\bar{z})^n$; e) $\overline{(\bar{z})}=z; \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

- **Modulul numărului complex**

Fie $z=a+bi, a,b\in\mathbb{R}$. Modulul numărului complex z este numărul real pozitiv $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

Proprietăți ale modulului:

a) $|z|\geq 0, \forall z\in\mathbb{C}$; b) $|z|=0\Leftrightarrow z=0$; c) $|\bar{z}|=|z|$; d) $|z|^2=z\cdot\bar{z}$;

e) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$. f) $|z^n|=|z|^n$; g) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$; h) $|z|=1\Leftrightarrow\bar{z}=\frac{1}{z}$;

Scanned with OKEN Scanner

i) $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

1. Să se determine numerele reale x și y astfel încât să aibă loc egalitatea de numere complexe:

a) $5-2x+(4y-x)\mathrm{i}=3y-4+(5+x)\mathrm{i}$;

b) $x(1+2\mathrm{i})+y(2-\mathrm{i})=4+3\mathrm{i}$. *(Variante Bacalaureat 2009)*

2. Să se calculeze:

a) $(1-\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})-3(2-\mathrm{i})$; b) $(2+3\mathrm{i})(4+5\mathrm{i})(-7+22\mathrm{i})$; *(Bacalaureat 2009)*

c) $(1+\mathrm{i})^2-(1-\mathrm{i})^2$; *(Bacalaureat 2007)* d) $\dfrac{4+3\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}-\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$; *(Bacalaureat 2008)*

e) $(2+\mathrm{i})^3+(2-\mathrm{i})^3$. *(Bacalaureat 2008)*

3. Să se calculeze:

a) $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{24}$; b) $\left(\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}-\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}\right)^2$; c) $\left(\dfrac{(1-2\mathrm{i})(3\mathrm{i}-1)}{5}\right)^4$;

d) $(2+\mathrm{i})^4+(2-\mathrm{i})^4$; e) $(1+\mathrm{i})^{20}$; f) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{2}\,\mathrm{i}}{\sqrt[4]{2}}\right)^{24}$. *(Variante Bacalaureat 2008)*

4. Să se arate că:

a) $\dfrac{1+3\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}+\dfrac{1-3\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}\in\mathbb{R}$; b) $\dfrac{16}{3+\sqrt{7}\mathrm{i}}+\dfrac{16}{3-\sqrt{7}\mathrm{i}}\in\mathbb{Z}$; c) $\left(\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^6\in\mathbb{Z}$; d) $(1-\mathrm{i})^{24}\in\mathbb{N}$.

(Variante Bacalaureat 2008)

5. Să se determine partea reală a numerelor complexe:

a) $z=\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^6$; b) $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{3\mathrm{i}+4}$; *(Variante Bacalaureat 2007/2008)*

c) $z=(1-\mathrm{i})^{10}+(1+\mathrm{i})^{10}$.

6. Să se determine partea imaginară a numerelor complexe:

a) $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$; b) $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{3\mathrm{i}+4}$; c) $z=\dfrac{2+3\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$. *(Variante Bacalaureat 2009)*

7. Să se calculeze modulul numerelor complexe:

a) $z=\dfrac{8+\mathrm{i}}{7-4\mathrm{i}}$; b) $z=\left(\sqrt{2}-1+\mathrm{i}\left(\sqrt{2}+1\right)\right)^2$; c) $z=1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\ldots+\mathrm{i}^6$;

d) $z=(3+4\mathrm{i})^4$; e) $z=\left(\cos\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}\right)^{10}$; f) $z=(3+4\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})$. *(Bac 2007/2008)*

8. Să se calculeze valoarea expresiilor:

a) $1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\ldots\mathrm{i}^{10}$; b) $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}^2\cdot\mathrm{i}^3\cdot\ldots\mathrm{i}^{10}$; c) $(1-\mathrm{i})\left(1-\mathrm{i}^2\right)\left(1-\mathrm{i}^3\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\mathrm{i}^{2008}\right)$.

(Variante Bacalaureat 2008)

9. Să se determine $a\in\mathbb{R}$, știind că $z=a+(1-a)\mathrm{i}$ are modulul 1.

10. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc egalitatea de numere complexe:

a) $(3+2\mathrm{i})^3=a+b\mathrm{i}$; b) $(-1+\mathrm{i})^{12}=a+b\mathrm{i}$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $\frac{3+4i}{4-3i}=a+bi$; d) $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^4=a+bi$. *(Variante Bacalaureat 2007)*

11. Se consideră numărul complex $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Să se demonstreze că $z^2=\bar{z}$. *(Bac 2008)*

12. Să se determine $x,y\in\mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea de numere complexe: $\overline{3x+4i}+5x-4yi=\overline{6-i}+\overline{5yi}$.

13. Să se determine $z\in\mathbb{C}$ știind că $\frac{\bar{z}+7i}{z}=6$. *(Variante Bacalaureat 2008)*

14. Fie $z\in\mathbb{C}$. Să se arate că dacă $2z+3\bar{z}\in\mathbb{R}$, atunci $z\in\mathbb{R}$. *(Variante Bacalaureat 2009)*

15. Fie $z\in\mathbb{C}$. Să se arate că $i\left(z-\bar{z}\right)\in\mathbb{R}$. *(Variante Bacalaureat 2009)*

16. Se consideră numărul $a\in\mathbb{R}$ și numărul complex $z=\frac{a+2i}{2+ai}$. Să se determine a pentru care $z\in\mathbb{R}$. *(Variante Bacalaureat 2008)*

17. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât partea reală a numărului complex $z=\frac{1}{a(1+i)+1-2i}$ să fie $\frac{2}{5}$.

18. Să se determine numerele complexe z al căror pătrat este egal cu:

a) $3-4i$; b) $\frac{-1+2i}{2+i}$; c) $\frac{3}{2}+2i$.

19. Să se determine numerele complexe z care verifică egalitățile:

a) $z+3i=5\bar{z}$; *(Bacalaureat 2009)* b) $z+2|z|=13+4i$; c) $4z^2+8|z|^2=3$.

20. Să se determine $z\in\mathbb{C}$ care verifică egalitatea $z+2|z-3|=\overline{3i+9}$.

21. Să se determine $z\in\mathbb{C}$, știind că $z^2=2i$. *(Variante Bacalaureat 2007)*

22. Știind că $z\in\mathbb{C}$ și $z^2+z+1=0$, să se calculeze $z^4+\frac{1}{z^4}$. *(Variante Bacalaureat 2008)*

23. Să se verifice că numărul $1+i$ este soluție a ecuației $z^4+4=0$. *(Variante Bacalaureat 2008)*

24. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:

a) $z^2=-9$; b) $x^2-8x+25=0$; c) $4z^2-4z+37=0$. *(Variante Bacalaureat 2007/2008)*

25. Fie z o rădăcină a ecuației $z^2+2z+4=0$. Să se calculeze modulul numărului complex z. *(Variante Bacalaureat 2008)*

26. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuațiile au o soluție indicată:

a) $z^2+(3m+1)z+5=0$, $z_1=-2+i$; b) $z^2-2z+m^2-2=0$, $z_1=1+i$.

27. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuațiile au soluții în mulțimea $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$:

a) $x^2-8x+m=0$; b) $(m-2)x^2-2(m+1)x+m+2=0$;

c) $x^2+(3m-1)x+m^2-m+1=0$.

28. Se consideră ecuația $x^2-6x+12=0$ cu soluțiile complexe x_1,x_2. Să se calculeze:

a) $x_1^2+x_2^2$; b) $x_1^3+x_2^3$; c) $\frac{1}{x_1^4}+\frac{1}{x_2^4}$.

29. Să se formeze ecuația de gradul doi cu coeficienți reali cunoscând o soluție:

a) $z_1=4-3i$; b) $z_1=(5-i)\cdot i$; c) $z_1=\frac{1-i}{2}\cdot(2+i)$; d) $z_1=\frac{2-i}{1-3i}$.

Scanned with OKEN Scanner

30. Fie $z_1 \in \mathbb{C}$ o rădăcină de ordinul 3 a unității, diferită de 1. Să se calculeze:

a) $1+z_1+z_1^2$; b) $z_1^2+\overline{z_1}^2$; c) $\left(z_1^4+\overline{z_1}^4\right)^{2011}$.

31. Să se arate că dacă z este soluție a ecuației $z^2+2x+4=0$, atunci $z^2-\frac{8}{z}=0$.

(Variante Bacalaureat 2009)

32. Să se rezolve ecuațiile bipătrate:

a) $z^4+5z^2-36=0$; b) $z^4+15z^2-16=0$;

c) $20z^4+z^2-1=0$; d) $9z^4+4z^2=0$.

33. Să se calculeze suma soluțiilor ecuației $z^4=1$. *(Variante Bacalaureat 2007)*

34. Se consideră ecuația $z^2+(m+1)z+m^2=0, m\in\mathbb{R}$. Să se determine m pentru care ecuația admite soluția $z=i$ și să se rezolve ecuația.

35. Să se determine numerele complexe z pentru care are loc egalitatea $|z+i|+z=2+i$.

36. Să se rezolve, în $\mathbb{C}$, ecuațiile:

a) $z+(1+i)\overline{z}=1$; b) $(2+i)\left(z+2\overline{z}\right)+2i-1=0$;

c) $\frac{z+i}{\overline{z}+i}=1+2i$; d) $\frac{z+1}{1+i}+\frac{\overline{z}+i}{1-i}=1+i$.

37. Să se determine $x,y\in\mathbb{R}$ pentru care $\overline{\left(\frac{i-x}{2+i}\right)}=2+\overline{\left(\frac{y+i}{2-i}\right)}$.

38. Se consideră ecuația $z^2+mz+2=0, m\in\mathbb{R}$.

a) Să se rezolve ecuația, în mulțimea $\mathbb{C}$, știind că are soluția $z_1=1+i$.

b) Pentru $m=2$, să se calculeze $S=z_1^4+z_2^4$, unde z_1, z_2 sunt soluțiile ecuației.

39. Să se determine $z\in\mathbb{C}$ dacă $i\cdot|z+1|+|z|=1+i$.

II. FUNCȚII ȘI ECUAȚII

2.1. Funcția putere cu exponent natural, funcția radical, funcția exponențială, funcția logaritmică. Funcții inversabile

Funcții injective, surjective, bijective

- **Funcții injective:** Funcția $f:A\to B$ este **injectivă** dacă are loc una din afirmațiile:

a) $\forall x_1,x_2\in A, x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$;

b) $\forall x_1,x_2\in A, f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$;

c) f este strict monotonă pe A;

d) Dacă $A,B\subset\mathbb{R}$ și orice paralelă dusă la axa Ox prin punctele codomeniului, intersectează $\mathcal{G}_f$ în cel mult un punct.

- **Funcții surjective:** $f:A\to B$ este **surjectivă** dacă are loc una din afirmațiile:

a) $\forall y\in B, \exists x\in A$ a.î. $y=f(x)$; b) $f(A)=B$;

c) Dacă f este funcție numerică și orice paralelă la axa Ox dusă prin punctele codomeniului, intersectează $\mathcal{G}_f$ în cel puțin un punct.

Scanned with OKEN Scanner

- **Funcţii bijective:** $f:A\to B$ este funcţie **bijectivă** dacă este injectivă şi surjectivă.
- Fie $f:A\to B, g:B\to C$:
  a) Dacă f,g injective (surjective) $\Rightarrow g\circ f$ injectivă (surjectivă);
  b) $g\circ f$ injectivă $\Rightarrow f$ injectivă;
  c) $g\circ f$ surjectivă $\Rightarrow g$ surjectivă.

Funcţii inversabile

- $f:A\to B$ este **inversabilă** $\Leftrightarrow \exists\, g:B\to A$, cu $g\circ f=1_A, f\circ g=1_B$.
- $f:A\to B$ este inversabilă $\Leftrightarrow f$ este bijectivă. $f^{-1}:B\to A, f^{-1}(y)=x$, unde $y=f(x)$.

FUNCŢIILE TRIGONOMETRICE INVERSE

- **Funcţia arcsinus:** $f:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], f(x)=\arcsin x$.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

- **Funcţia arccosinus:** $f:[-1,1]\to[0,\pi], f(x)=\arccos x$

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

- **Funcţia arctangentă:** $f:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), f(x)=\operatorname{arctg} x$.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

- **Funcţia arccotangentă:** $f:\mathbb{R}\to(0,\pi), f(x)=\operatorname{arcctg} x$.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Formule utile:

- $\sin(\arcsin x)=x, x\in[-1,1]$;
- $\cos(\arccos x)=x, x\in[-1,1]$;
- $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x, x\in\mathbb{R}$;
- $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x, x\in\mathbb{R}$;
- $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,1]$;

Scanned with OKEN Scanner

- $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,1]$
- $\operatorname{tg}(\arccos x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x\in[-1.1]\setminus\{0\}$;
- $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}, x\in[-1,1]$;
- $\arcsin(-x)=-\arcsin x, x\in[-1,1]$;
- $\arccos(-x)=\pi-\arccos x, x\in[-1,1]$;

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^4$.

a) Să se arate că f este funcţie pară. b) Să se calculeze $f(-2)+f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(2)-f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$ cu proprietatea că $f(3)=27$. Să se calculeze $f(2^2)-f(2)$.

3. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3$, $g(x)=x^6$. Să se calculeze:

a) $f(g(1))+g(f(2))$; b) $f\left(g\left(\sqrt[3]{2}\right)\right)-g\left(f\left(-\sqrt[3]{3}\right)\right)$.

4. Fie funcţia putere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$. Să se rezolve ecuaţia:

a) $3f(x)+2x-1=0$; b) $f(2x-3)-f(x)+3=0$.

5. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$ este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$.

6. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3$ este strict crescătoare pe intervalul $[2,9]$.

7. Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}$. Să se calculeze $f(1)+9f\left(\frac{1}{9}\right)-10f\left(\frac{1}{25}\right)$.

8. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$. Să se calculeze $f(8)\cdot f\left(\frac{1}{64}\right)+f\left(-\frac{1}{8}\right)$.

9. Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}$.
Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x-2)=3$.

10. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care:

a) $f(x-2)=1$; b) $f(2x+5)=f(x)$.

11. Fie funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$. Să se calculeze $f(f(512))$. *(Bacalaureat 2009)*

12. Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}$.
Să se determine mulţimile: a) $f([1,9])$; b) $f\left(\left[\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right]\right)$.

13. Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se calculeze $\frac{1}{f(1)+f(2)}+\frac{1}{f(2)+f(3)}+\frac{1}{f(3)+f(4)}$.

14. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$.

a) Să se arate că $f(1)+f(27)-f(8)+f\left(\frac{1}{8}\right)\cdot f(64)\in\mathbb{N}$;

b) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $f(4x-1)=3$.

15. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt[3]{x}$.

Să se calculeze $f(16)+[f(5)]-[g(36)]$, unde prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a lui a.

16. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[n]{x}$, $n\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $f(64)=4$.

a) Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$. b) Pentru $n=3$, să se calculeze $f(2)\cdot f(2^2)\cdot f(2^3)$.

17. Să se determine care din punctele $A\left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$, $B\left(-1,\frac{1}{2}\right)$, $C(2,-4)$ aparțin graficului funcției $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=2^x$.

18. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to(0,+\infty), f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ și $g(x)=5^{-x}$. Să se calculeze:

a) $f(0)+f(1)+\ldots+f(4)$; b) $g(-1)+g(0)+5g(1)$. *(Bacalaureat 2009)*

19. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty), f(x)=2^x$. Să se calculeze $f(-3)\cdot f(-2)\cdot\ldots\cdot f(3)$. *(Bacalaureat 2009)*

20. Să se determine punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3^{x+1}-1$ cu axele de coordonate. *(Bacalaureat 2009)*

21. Să se determine punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^{x+3}-2$ cu axele de coordonate.

22. Se dau funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4^x$ și $g(x)=5^x$.

Să se verifice dacă: $g(-2)\cdot g\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot g(3)=\frac{1}{2}f(3)-2f(1)+1$.

23. Să se precizeze monotonia funcției $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, definite prin:

a) $f(x)=\left(\frac{9}{7}\right)^x$; b) $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$; c) $f(x)=\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^x$.

24. Să se compare numerele: a) $5^{\frac{7}{3}}$ și $5^{\frac{9}{4}}$; b) $(0,6)^{\frac{7}{2}}$ și $\left(\frac{5}{3}\right)^3$; c) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{-2}$ și $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{1,5}$.

25. Folosind proprietatea de monotonie a funcției exponențiale să se determine numerele reale x care verifică relațiile:

a) $5^x\le 625$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+5}>\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; c) $2^{x+1}>128$; d) $(1,5)^x\le\left(\frac{3}{2}\right)^{6-x}$; e) $3^{x^2}<3^{8x-7}$; f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+5x+6}<1$.

26. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_2 x$.

Să se calculeze $f(1)+f(4)-f(2)$. *(Bacalaureat 2009)*

27. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\lg x$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se calculeze suma $S=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+\ldots+f\left(\frac{999}{1000}\right)$.

28. Fie funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_3 x$. Să se determine care din următoarele puncte sunt pe graficul funcţiei: $A(1,0)$, $B\left(\frac{1}{9},-2\right)$, $C(9,3)$, $D\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$.

29. Fie funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$. Să se determine a astfel încât punctul $P(8,3)$ să fie pe graficul funcţiei.

30. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $M(5,m+2)$ să fie pe graficul funcţiei $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_{\frac{1}{5}} x$.

31. Fie funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+\log_3 x$. Să se determine media aritmetică şi media geometrică a valorilor $f(1)$ şi $f(3)$.

32. Să se compare numerele:

a) $a=\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{5}$ şi $b=\log_{\frac{1}{2}}\frac{9}{14}$; b) $a=6$ şi $b=\log_3 720$.

33. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât:

a) $\log_2(x-3)\geq 1$; b) $\log_{\frac{1}{3}}(4x-5)>-1$; c) $\lg(9-7x)\geq 2$; d) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{x-5}{2}<0$.

34. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât:

a) $\log_2(2x-3)\leq\log_2(x+4)$; b) $\log_{\frac{1}{10}}(4+10x)>\log_{\frac{1}{10}}(x+25)$; c) $\log_3 x^2<\log_3 25$.

35. Să se determine partea întreagă a numerelor:

a) $a=\lg 15$; b) $b=\log_2\frac{73}{2}$; c) $c=\log_5 325$; d) $d=\log_{\frac{1}{6}} 4$.

36. Să se arate că are loc relaţia:

a) $\log_2 3\in(1,2)$; b) $\log_{\frac{1}{2}} 10\in(-4,-3)$.

37. Să se determine punctele de intersecţie a graficului funcţiei $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_2(x+2)-1$ cu axele de coordonate.

38. Să se determine punctele de intersecţie a graficului funcţiei $f:(-5,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+3)+2$ cu axele de coordonate.

39. Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=3^x$ şi $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\log_3 x$. Să se determine: a) $g(f(2))$; b) $f\left(g\left(\frac{1}{9}\right)\right)$; c) $g\left(g\left(\sqrt[3]{3}\right)\right)$.

40. Să se determine domeniul maxim de definiţie D al funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$, ştiind că:

a) $f(x)=\lg(2x-3)$; *(Bacalaureat 2009)* b) $f(x)=\log_3(4-12x)$;

c) $f(x)=\log_3(-3x^2+7x-2)$; d) $f(x)=\log_{x+1}(2-x)$.

41. Să se arate că următoarele funcţii sunt injective:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x-2$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-4x+3$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^4+1$; d) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_2 x$.

42. Să se arate că următoarele funcţii nu sunt injective:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+3$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x^4$; c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+3$.

43. Să se arate că următoarele funcţii sunt surjective:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-5$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-4x+2$;

c) $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty), f(x)=9x^2$.

44. Să se arate că următoarele funcţii sunt bijective:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=7x-1$; b) $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty), f(x)=\sqrt{x}$;

c) $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}\setminus\{-1\}, f(x)=\dfrac{x-1}{3-x}$.

45. Să se aratec ă următoarele funcţii sunt inversabilc şi să aflc inversele lor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-8$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x+4$;

c) $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty), f(x)=\dfrac{1}{4}\cdot x^2$.

46. Să se determine inversa funcţiei bijective $f:(0,+\infty)\to(1,+\infty)$, $f(x)=x^2+1$. *(Bac2009)*

47. Să se determine inversa funcţiei bijective $f:\mathbb{R}\to(1,+\infty), f(x)=e^x+1$. *(Bacalaureat 2009)*

48. Să se determine inversa funcţiei bijective $f:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=3\log_2 x$. *(Bac 2009)*

49. Să se compare numerele:

a) $x=\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\arcsin(1)$ şi $y=\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)+\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

b) $x=\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+\operatorname{arcctg}(0)$ şi $y=2\operatorname{arctg}(1)+3\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right)$;

c) $x=\arcsin\left(\dfrac{-1}{2}\right)+\arccos(-1)$ şi $y=\arccos\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$;

50. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care sunt definite funcţiile $f:D\to\mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x)=\arcsin(4x-9)$; b) $f(x)=\arccos\dfrac{3x}{5}$;

c) $f(x)=\arccos(2x^2-7)$; d) $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{2-x}{3x+2}}$.

51. Să se calculeze:

a) $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$; b) $\cos\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

c) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right)$; *(Variante Bacalaureat 2008)* d) $\cos\left(2\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

52. Să se calculeze valoarea expresiei $E(x)=\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{2}\right)+\sin\left(\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

53. Să se calculeze:

Scanned with OKEN Scanner

a) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{4}{5}\right)$;

b) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}+\arccos\frac{24}{25}\right)$;

c) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3+\operatorname{arctg}5)$.

d) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}2)$.

54. Să se arate că numărul $n=\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)+\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ este număr natural. (*Bac 2009*)

55. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\arccos(\cos x)$. Să se calculeze suma $S=f(0)+f(\pi)+f(2\pi)+\ldots+f(2006\pi)$. (*Variante Bacalaureat 2006*)

2.2. Ecuații iraționale, ecuații exponențiale, ecuații logaritmice

- Ecuația în care necunoscuta este la exponent se numește **ecuația exponențială.**
  - Ecuația: $a^{f(x)}=a^{g(x)}, a>0, a\neq 1$. Din injectivitatea funcției exponențiale, rezultă $f(x)=g(x)$.
  - Ecuația $a^{f(x)}=b^{g(x)}, a,b\in(0,\infty)\setminus\{1\}$. Prin logaritmare rezultă $f(x)\cdot\lg a=g(x)\cdot\lg b$.
- **Ecuația logaritmică** este ecuația în care necunoscuta apare sub un logaritm.
  - Ecuații de forma $\log_a f(x)=\log_a g(x), a>0, a\neq 1, f(x)>0, g(x)>0$.

Din injectivitatea funcției logaritmice, rezultă $f(x)=g(x)$.

Ecuații de forma $\log_a f(x)=\log_b g(x)$, $a,b>0, a,b\neq 1, f(x)>0, g(x)>0$. Se aduc logaritmii la aceeași bază și apoi se folosește injectivitatea funcției logaritmice.

49. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale:

a) $\sqrt{x-5}=2$; b) $\sqrt{7-x}=1$; c) $\sqrt{x+2}=3$; d) $\sqrt{x^2-25}=12$;

e) $\sqrt{169-x^2}=12$; f) $\sqrt{x^2-4}=8$; g) $\sqrt{x^2-x-2}=2$; h) $\sqrt[3]{x^2-x-3}=-1$. (*Bac 2009*)

50. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale:

a) $\sqrt{x+1}=5-x$; b) $\sqrt{2x+3}=x$; c) $\sqrt{3x+4}=2\sqrt{x}$;

d) $\sqrt{x^2+2x-3}=2\sqrt{3}$; e) $\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x-2}$; f) $\sqrt{16+x^2}=11-2x$. (*Bac 2009*)

51. Să se rezolve ecuația $\frac{n!}{12}=(n-1)!\sqrt{n}$, $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

52. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale:

a) $\sqrt{4x^2+6x+3}=x+2$; b) $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x+2}=0$; c) $\sqrt[3]{x^3+x+1}=x$;

d) $\sqrt[3]{x^3+x^2-x-2}=x$; e) $\sqrt[3]{8-x}=\sqrt[3]{9-4x}$; f) $\sqrt[3]{-x+3}=2\sqrt[3]{x}$.

53. Să se determine $x\in\mathbb{Z}$ astfel încât numerele:

a) $4x-5, \sqrt{15x^2+9}, 6x-1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice;

b) $\sqrt{x+3}, \sqrt{x+6}, \sqrt{x+18}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

54. Să se rezolve în mulțimea numerelor rele ecuațiile:

a) $3^{2x-1}=3^{5-x}$; b) $5^{x^2-x}=5^{5x-5}$; c) $3^{x-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$;

Scanned with OKEN Scanner

d) $6^{2x-5}=6^{x^2-8}$; e) $4^{x+2}=2^{x^2+5}$; f) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{x-2}$. (*Bacalaureat 2009*)

55. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiilor:

a) $2^{x^2}=16$; b) $2^{x^2-x}=4$; c) $2^{\sqrt{x-1}}=4$; d) $2^{x^2+x+1}=8$;

e) $2^{2x^2+3x-2}=8$; f) $2^{x^2-4x}=\frac{1}{8}$; g) $4^{x-1}=\frac{1}{4}$; h) $\frac{1}{2^x}=4$.

56. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a) $\frac{2^x}{3^x}=\frac{3}{2}$; b) $3^x\cdot 5^x=15$; c) $3^{x+1}\cdot 2^x=108$;

d) $2^{\log_2 x}=4$; e) $2^x\cdot 3^x=6$; f) $\frac{1}{2^x}=\frac{4^x}{8}$. (*Bacalaureat 2009*)

57. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a) $2^x+2^{x+3}=36$; b) $3^x+2\cdot 3^{x+1}=7$; c) $4^x-3\cdot 2^x+2=0$;

d) $9^x-4\cdot 3^x+3=0$; e) $3^{2x}+2\cdot 3^x-3=0$; f) $2^x-14\cdot 2^{-x}=-5$;

g) $3^x+3^{-x}=\frac{10}{3}$; h) $36^x+7\cdot 3^x\cdot 2^x=78$. (*Bacalaureat 2009*)

58. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $3\cdot 4^x-6^x=2\cdot 9^x$; b) $2\cdot 7^{2x}=35^x+25^x$.

59. Să se determine numărul real x ştiind că:

a) 2^x-1, 4^x şi $2^{x+1}+3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice; (*Bacalaureat 2009*)

b) $9+2\cdot 3^x$, 3^x şi 3 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

60. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care numerele 3^x-1, 3^{x+1}, $5\cdot 3^x+1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

61. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiilor:

a) $\log_2(x+5)=3$; b) $\log_3(x-6)=0$; c) $\log_3(x^2-1)=1$; d) $\log_5(9-x^2)=1$;

e) $\log_5(2x+3)=2$; f) $\log_7(2x+1)=2$; g) $\log_2(x^2-x-2)=2$; h) $\log_5(x^2+2x-3)=1$.

(*Bacalaureat 2009*)

62. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiilor:

a) $\log_3(3x-1)=\log_3(2x+1)$; b) $\log_2(x^2+4)=\log_2(x+4)$;

c) $\log_5(x^2-2x)=\log_5(2x-3)$; d) $\log_2(2x+5)=\log_2(x^2+3x+3)$;

e) $\log_2(x^2+3x-15)=\log_4 64$; f) $\log_2\sqrt[3]{x}-1=0$. (*Bacalaureat 2009*)

63. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiilor:

a) $\log_2(x+2)-\log_2(x-5)=3$; b) $\log_2(x+2)-\log_2(x+1)=1$;

c) $\lg(x+4)+\lg(2x+3)=\lg(1-2x)$; d) $\log_5(3x+1)=1+\log_5(x-1)$;

e) $\log_2(x^2-x-2)-\log_2(2x-4)=1$; f) $\log_2(x+3)-\log_2 x=2$.

(*Bacalaureat 2009*) (*Bacalaureat 2010*)

64. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiilor:

a) $\lg^2 x-3\lg x+2=0$; (*Bacalaureat 2009*) b) $\lg^2 x-4\lg x+3=0$; (*Bacalaureat 2009*)

c) $\log_3^2 x^2+\log_3 x=5$; d) $\log_2(4^x+2^x-4)=x+2$.

65. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei:

Scanned with OKEN Scanner

a) $\log_3 5x-2\log_9(10x+1)=-1$; b) $\log_2(x+7)-2\log_4(x^2+1)=2$.

66. Să se determine $x\in(0,\infty)$ știind că numerele:

a) $\lg\sqrt{x}$, $\frac{3}{2}$ și $\lg x$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice; *(Bacalaureat 2009)*

b) 8, $2+\log_2 x$ și $\log_2 x$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

III. PROBLEME DE NUMĂRARE

Permutări

• O mulțime împreună cu o ordine bine determinată de dispunere a elementelor ei este o **mulțime ordonată.**

• Fie A,B mulțimi finite și $m=\text{card}(A), n=\text{card}(B)$. **Numărul funcțiilor** $f:A\to B$ este egal cu n^m.

• Se numește **permutare** a mulțimii finite A orice mulțime ordonată formată cu elementele mulțimii A.

• **Numărul permutărilor** mulțimii A cu n elemente este $P_n=1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n\overset{not.}{=}n!$.

• Dacă $\text{card}(A)=n$, **numărul funcțiilor bijective** $f:A\to A$ este egal cu $n!$.

Aranjamente

Fie $A\neq\varnothing, \text{card}(A)=n$ și $k\in\mathbb{N}, k\leq n$

• Submulțimile ordonate cu k elemente ale mulțimii A se numesc **aranjamante de n elemente luate câte k.**

• Numărul aranjamentelor de n elemente luate câte k este egal cu: $A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$.

• $A_n^k=n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$, $A_n^0=1, A_n^n=n!$

• Numărul funcțiilor injective $f:A\to B$ este egal cu A_n^k, unde $n=\text{card}(B)$ și $k=\text{card}(A)$.

Combinări

Fie $A\neq\varnothing, \text{card}(A)=n, k\in\mathbb{N}, k\leq n$.

• Submulțimile mulțimii A formate cu k elemente se numesc **combinări de n elemente luate câte k.**

• Numărul combinărilor de n elemente luate câte k este egal cu $C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}$.

• $C_n^k=\frac{A_n^k}{P_k}$.

• $C_n^k=C_n^{n-k}$ (formula combinărilor complementare).

• $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$ (formula de recurență a combinărilor).

1. Să se calculeze $0!+1!+2!+3!$. *(Bacalaureat 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

2. Să se calculeze: a) $\frac{10!+11!}{9!}$; b) $\frac{(n+2)!}{n!+(n+1)!}$; c) $\frac{4!+6!}{31\cdot 2!}$.

3. Să se determine numărul natural n, $n\geq 5$ știind că $\frac{(n-3)!}{(n-5)!}=6$. *(Bacalaureat 2009)*

4. Să se rezolve ecuația $\frac{n!}{12}=(n-2)!$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. *(Bacalaureat 2009)*

5. Să se rezolve ecuațiile:

a) $3n!=(n+1)!$; b) $(n+2)!=12n!$; c) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}=20$; d) $C_{n+2}^1+\frac{(n+2)!}{(n+1)!}=n^2+5$.

6. Să se determine câte numere naturale de 4 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$. *(Bacalaureat 2009)*

7. Câte numere naturale de 6 cifre distincte se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5.

8. Să se demonstreze că numărul $m=\frac{8!}{3!\cdot 5!}-\frac{9!}{2!\cdot 7!}$ este număr natural. *(Bacalaureat 2009)*

9. Să se calculeze numerele: a) A_5^4; b) $A_3^2+A_4^2+A_5^3$; c) $\left(A_4^3+A_4^4\right):A_3^2$.

10. Câte numere formate din 4 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$? *(Bacalaureat 2009)*

11. Să se determine câte numere naturale formate din cinci cifre distincte există.

12. Să se determine câte numere naturale de câte trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$. *(Bacalaureat 2009)*

13. Să se rezolve ecuația $A_n^2=12$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. *(Bacalaureat 2009)*

14. Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{N}$ ecuațiile:

a) $A_{n+3}^2=72$; b) $A_{2n+3}^2=110$; c) $2A_{n+1}^2-A_{n+2}^2=10$; d) $4A_{n+1}^2+70=5A_{n+2}^2$.

15. Să se rezolve inecuațiile în mulțimea $\mathbb{N}$:

a) $A_{n+2}^2\leq 18$; b) $11A_n^2>2A_{n+1}^3$; c) $A_n^2-A_{n-1}^2\leq 12$; d) $C_4^1x^2+C_7^1x-11\leq 0$.

16. Să se calculeze:

a) $C_8^3+C_8^5$; b) $C_{10}^9-C_9^8$; c) $C_{1000}^2-C_{1000}^{998}$;

d) $2C_3^1-A_3^2$; e) $\frac{2!+3!}{C_8^1}$; f) $C_4^0-C_4^1+C_4^2-C_4^3+C_4^4$. *(Bacalaureat 2009)*

17. Să se compare numerele $a=C_4^1+C_4^3$ și $b=C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3$. *(Bacalaureat 2009)*

18. Să se compare numerele: $a=\frac{C_{2010}^1}{2!}$ și $b=\log_2 2^{1006}$.

19. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuațiile:

a) $C_n^2=28$; b) $C_{n+2}^{n+1}=2$; c) $C_n^0+C_n^1=8$; d) $C_n^1+A_n^2=4$; e) $C_n^2=C_n^1+2$; f) $C_{n+1}^1=n^2-1$.

20. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuațiile:

a) $C_x^3=\frac{5}{4}\cdot x(x-3)$; b) $12C_x^1+C_{x+4}^2=162$; c) $C_x^2+A_x^1=6$; d) $C_{2n+1}^2+3A_n^2=16$.

21. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuațiile:

a) $2C_n^2\leq n+8$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$; b) $C_{17}^n\leq C_{17}^{n-2}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $n\leq 17$. *(Bacalaureat 2009)*

22. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuațiile: a) $C_{x-1}^4>C_{x-1}^3$; b) $C_{n+4}^{n-1}\leq 5A_{n+4}^3$.

Scanned with OKEN Scanner

23. Să se determine numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4\}$. (*Bac 2009*)

24. Să se determine numărul de submulţimi cu două elemente ale unei mulţimi care are 6 elemente. (*Bacalaureat 2009*)

25. Să se calculeze numărul de submulţimi cu 3 elemente ale unei mulţimi care are 8 elemente.

26. Să se determine numărul natural n astfel încât numărul submulţimilor cu două elemente ale unei mulţimi cu n elemente să fie egal cu 6. (*Bacalaureat 2009*)

27. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care mulţimea $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ are 36 de submulţimi cu două elemente.

28. Câte elemente are o mulţime A dacă are 45 de submulţimi cu două elemente?

29. Câte elemente are o mulţime A dacă are 42 de submulţimi ordonate cu două elemente.

30. Se consideră mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Câte submulţimi cu două elemente, ambele impare, are mulţimea A? Dar cu 2 elemente pare?

31. Să se verifice dacă numerele A_5^2, C_6^2, C_5^3 pot fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

32. Să se detetermine $n \in \mathbb{N}$ pentru care numerele 1, $\frac{C_n^1}{2}$ şi $\frac{C_n^2}{4}$ sunt în progresie aritmetică.

33. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care numerele C_2^0, $n-3$ şi C_n^2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

IV. ELEMENTE DE STATISTICĂ ŞI PROBABILITĂŢI

Dobândă simplă

Fie $S =$ suma iniţială, $r\,\% =$ rata dobânzii, $n =$ număr de ani, $S_n =$ suma finală.

Dobânda simplă se calculează cu formula $D_s = S\frac{r}{100}\cdot n$.

Dacă anul este divizat în k părţi egale (zile, luni) şi t_k este numărul de astfel de părţi pe care se calculează dobânda, atunci $D_s = S\cdot\frac{r}{100}\cdot\frac{t_k}{k}$.

Dobânda compusă

Dacă $S =$ suma iniţială, $r\,\% =$ rata dobânzii şi n este timpul cât a durat plasamentul, dobânda compusă este $D_c = S\left(R^n - 1\right)$, unde $R = 1 + \frac{r}{100}$. Suma finală este $S_n = S\cdot R^n$.

Taxa pe valoarea adăugată (TVA)

$TVA = \frac{p}{100}$. Preţ producţie, unde $p\,\% =$ cota de impozitare = procentul TVA.

Preţ vânzare = Preţ producţie + *TVA*

ELEMENTE DE CALCULUL PROBABILITĂŢILOR

- Dacă A este un eveniment aleator, atunci probabilitatea realizării acestuia este

$$P(A) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}.$$

Proprietăţi: $P(\overline{A}) = 1 - P(A), P(\varnothing) = 0,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),\ \forall A, B \in \mathscr{P}$.

Scanned with OKEN Scanner

1. Suma de 2200 lei reprezintă 5% din capitalul unei firme. Ce capital deţine această firmă?
2. 45% din efectivul unei şcoli, adică 270 de elevi reprezintă elevi cu vârsta sub 15 ani. Câţi elevi sunt în această şcoală?
3. Preţul unui obiect este de 12000 lei. Să se determine preţul după o ieftinire cu 10,5%.
4. După o reducere de 20%, preţul unui produs este de 320 lei. Să se determine preţul produsului înainte de reducere. (*Bacalaureat 2009*)
5. După o reducere de 15%, urmată de o altă reducere de 10% preţul unui produs este de 1530 lei. Să se determine preţul produsului înainte de reducere.
6. Preţul unui produs este de 5400 lei. Cu ce procent trebuie redus preţul produsului pentru ca acesta să coste 4860 lei? (*Bacalaureat 2009*)
7. Preţul unui produs este de 8650, După o ieftinire produsul costă 7612. Să se determine procentul de ieftinire.
8. După două ieftiniri succesive cu 10%, respectiv 25%, preţul unui produs este de 540 lei. Să se determine preţul produsului înainte de cele două ieftiniri. (*Bacalaureat 2009*)
9. După două ieftiniri succesive cu 15%, respectiv cu 8% preţul unui produs este de 3128 lei. Să se determine preţul produsului după prima ieftinire şi preţul iniţial.
10. Să se determine preţul iniţial al unui produs care după o scumpire de 15% costă 460 lei. (*Bacalaureat 2009*)
11. Preţul unui produs este de 8400 lei. Să se determine preţul produsului după o scumpire cu 12%.
12. După o creştere cu 20% preţul unui produs este de 540 lei. Să se determine preţul iniţial al produsului.
13. După două scumpiri succesive cu 10%, respectiv cu 20%, preţul unui produs este de 660 lei. Să se determine preţul iniţial al produsului. (*Bacalaureat 2009*)
14. Preţul unui produs este de 4500 lei. Cu ce procent trebuie crescut preţul pentru ca produsul să coste 4950 lei?
15. Preţul unui produs ete de 2000 lei. Ce preţ va avea produsul dacă se va aplica o scumpire cu 10% urmată de o ieftinire cu 10%?
16. Să se calculeze taxa TVA pentru un produs ştiind că preţul de vânzare al produsului este de 1488 lei (procentul TVA este de 24%).
17. Să se determine preţul de vânzare al unui produs ştiind că preţul de producţie (fără TVA) este de 400 lei iar procentul TVA este de 24%.
18. O persoană a depus la bancă 1500 lei. Ce sumă a primit după un an, ştiind că rata dobânzii a fost de 8%? (*Bacalaureat 2009*)
19. O sumă de 1000 lei a fost depusă la o bancă şi după un an s-a obţinut o dobândă de 80 de lei. Care a fost rata dobânzii? (*Bacalaureat 2009*)
20. Se plasează în regim de dobândă compusă pe o perioadă de 2 ani suma de 2000 lei cu rata dobânzii 10%. Să se calculeze dobânda obţinută.
21. O persoană constituie un depozit de 10000 lei pe timp de doi ani cu rata dobânzii compuse de 5%. Să se calculeze ce sumă va obţine la expirarea termenului.
22. Mediile semestriale obţinute de elevii unei clase sunt următoarele: 6, 7, 7, 5, 9, 8, 8, 8, 6, 9, 6, 5, 8, 10, 7, 10, 6, 5, 5, 8, 9, 10, 8, 7, 9, 9, 8, 10, 6, 8, 9, 10.
a) Să se alcătuiască seria statistică asociată acestui fenomen.
b) Să se reprezinte grafic seria statistică prin benzi.
23. Distribuţia unui grup de elevi după notele obţinute la un test de evaluare este următoarea:

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	20	30	50	70	15	10	5

a) Să se reprezinte grafic seria statistică.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se determine valoarea medie a variabilei statistice.

24. Măsurile în milimetri ale diametrelor pieselor dintr-un eşantion sunt date în tabelul următor:

Diametrul (mm)	[4,10)	[10,16)	[16,22)	[22,28)	[28,34)	[34,40)
Nr. piese	60	90	120	100	80	50

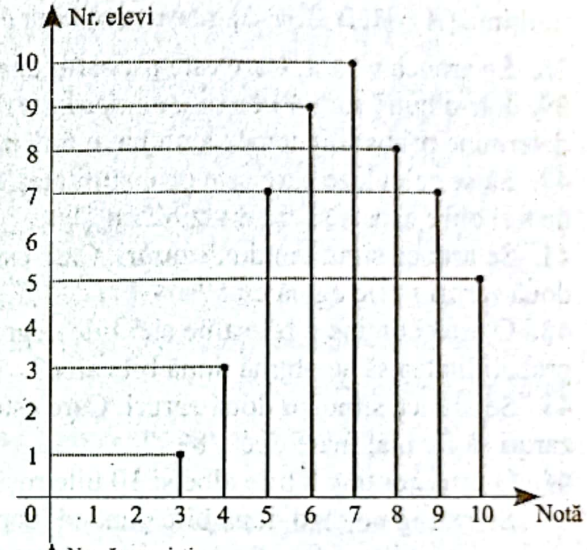
a) Să se reprezinte histograma asociată seriei statistice.
b) Câte piese au diametrul cel puţin 16 mm?
c) Câte piese au diametrul mai mic decât 28 mm?
d) Care este valoarea medie a diametrelor pieselor din eşantion?

25. În urma evaluării masei unui grup de sportivi s-au consemnat următoarele date statistice structurate pe clase de valori:

Masa (kg)	[70,74)	[74,78)	[78,82)	[82,86)	[86,90)	[90,94)
Nr. sportivi	5	25	15	30	20	5

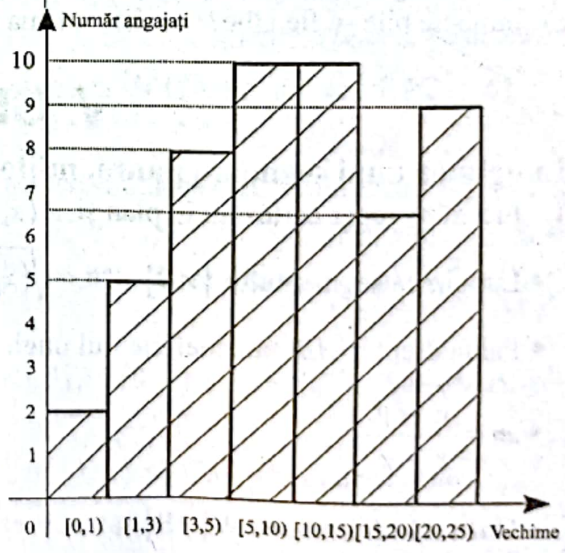
a) Să se precizeze efectivul total al populaţiei statistice.
b) Să se reprezinte grafic seria statistică prin histogramă şi diagramă structurală.

26. Următoarea diagramă cu coloane reprezintă interpretarea grafică a rezultatelor obţinute de un grup de elevi la un test.



a) Lecturând graficul să se alcătuiască seria statistică corespunzătoare.
b) Câţi elevi au note mai mici ca 8?
c) Câţi elevi au cel puţin nota 6?
d) Care este nota cu frecvenţa cea mai mare?
e) Calculaţi valoarea medie a seriei statistice obţinute.

27. Histograma alăturată reprezintă interpretarea geometrică a studiului unui grup de angajaţi după vechimea în muncă.



1. Lecturând graficul precizaţi:
a) Populaţia statistică şi efectivul total al acesteia.
b) Alcătuiţi seria statistică corespunzătoare, precizând tipul variabilei statistice.
c) Care este vechimea dominantă în această serie statistică.
d) Câţi angajaţi au o vechime de cel putin 10 ani?

28. Se consideră toate numerele naturale de trei cifre scrise cu elemente ale mulţimii $\{1, 2\}$. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un astfel de număr, acesta să fie divizibil cu 3.

29. Să se calculeze probabilitate ca alegând un număr din mulţimea $A=\left\{\sqrt{1},\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},...,\ \sqrt{100}\right\}$ acesta să fie număr raţional.

30. Fie mulţimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element $n\in A$ acesta să verifice inegalitatea:

a) $n^2\le 2^n$; (*Bac2009*) b) $n!\ge n^2$; c) $n(n-1)\ge 20$; (*Bac2009*) d) $n^2+n>n!$.

31. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element $n\in\{1, 2, 3, 4\}$ acesta să verifice

Scanned with OKEN Scanner

inegalitatea $3^n > n^3$. (*Bacalaureat 2009*)

32. Să se determine probabilitatea ca alegând unul din numerele $5!$, A_6^2, C_7^3 acesta să fie divizibil cu 6.

33. Să se determine probabilitatea ca alegând un element al mulţimii $\{10, 11, 12, ..., 20\}$ acesta să fie număr prim. (*Bacalaureat 2009*)

34. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale mai mici ca 100 acesta să fie cubul unui număr natural.

35. Se consideră mulţimea $A=\{1, 2, 3\}$. Să se determine probabilitatea ca alegând un număr de două cifre format cu elementele lui A, acesta să aibă cifrele egale. (*Bacalaureat 2009*)

36. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr natural de trei cifre, acesta să fie pătrat perfect.

37. Să se calculeze probabilitatea ca alegând o mulţime din mulţimea submulţimilor nevide ale mulţimii $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ aceasta să aibă două elemente.

38. Se aruncă un zar. Care este probabilitatea ca numărul obţinut să fie divizibil cu 2?

39. Într-o cutie sunt 40 de bile numerotate de la 1 la 40. Se extrage o bilă la întâmplare. Să se determine probabilitatea de a obţine o bilă numerotată cu un număr multiplu de 8.

40. Să se calculeze care este probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre acesta să fie divizibil cu 100.

41. Se aruncă simultan două zaruri. Care este probabilitatea ca suma numerelor obţinute pe cele două zaruri să fie egală cu 5?

42. O urnă conţine 4 bile albe şi 5 bile negre. Se extrag simultan două bile. Care este probabilitatea să se obţină două bile albe?

43. Se aruncă simulan două zaruri. Care este probabilitatea ca suma numerelor de pe cele două zaruri să fie mai mare decât 8?

44. O urnă conţine 8 bile albe şi 10 bile roşii.
Se extrag pe rând două bile punând înapoi prima bilă extrasă. Care este probabilitatea ca:
a) ambele bile să fie albe? b) prima să fie albă şi a doua roşie?

V. GEOMETRIE

Lungimea unui segment, pantă, mijlocul unui segment.

1. Fie xOy reper cartezian în plan şi $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

- Lungimea segmentului $[AB]$: $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.
- Panta dreptei AB sau coeficientul unghiular este $m=\operatorname{tg}\alpha$, unde $\alpha=m(\widehat{d,Ox})$.
- $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
- Dacă M este mijlocul $[AB]$, atunci $x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2}, y_M=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.
- Dacă $P\in[AB]$ şi $\dfrac{AP}{PB}=k$, atunci $x_p=\dfrac{x_A+kx_B}{1+k}, y_p=\dfrac{y_A+ky_B}{1+k}$.
- Coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC sunt:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuații ale dreptei

a) Ecuația dreptei determinată de un punct și o direcție dată.

- **Ecuația generală a dreptei:** $Ax+By+C=0$.

Dacă $B\neq 0, m=-\frac{A}{B}$ este panta dreptei.

- **Ecuația carteziană explicită:** $y=mx+n$, unde m este panta.

b) Ecuația dreptei determinată de două puncte $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ sau

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0;$$

c) Ecuația dreptei determinată de un punct $A(x_1,y_1)$ **și pantă** m: $y-y_1=m(x-x_1)$.

d) Ecuația dreptei prin tăieturi: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$, unde $A(a,0), B(0,b)$ sunt intersecțiile dreptei cu axele de coordonate.

- Punctele $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$ sunt **coliniare** dacă $\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$.

1. În reperul catezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$ și $B(-2,2)$. Să se determine distanța dintre A și B. *(Bacalaureat 2009)*

2. Să se determine distanța de la punctul $A(-6,8)$ la originea reperului cartezian xOy. *(Bacalaureat 2009)*

3. Să se determine numărul real a știind că lungimea segmentului determinat de punctele $A(-1,2)$ și $B(4-a,4+a)$ este egală cu 5. *(Bacalaureat 2009)*

4. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât distanța dintre punctele $M(2a+1,\ a-4)$ și $P(-1,6)$ să fie egală cu 10.

5. Se consideră punctele $A(2,m)$ și $B(-m,-2)$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $AB=4\sqrt{2}$. *(Bacalaureat 2009)*

6. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2-m,m)$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $OM=\sqrt{10}$.

7. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(4,7)$ și $C(-6,7)$. Să se verifice că triunghiul ABC este dreptunghic în A.

8. În reperul cartezian xOy se dau punctele $A(0,a)$, $B(-1,2)$ și $C(4,5)$, unde a este parametru real. Să se determine valorile lui a pentru care triunghiul este dreptunghic în A. *(Bacalaureat 2009)*

9. Să se determine perimetrul triunghiului ABC, știind că $A(5,2)$, $B(3,-1)$, $C(1,2)$.

10. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$ știind că:

a) $A(5,-4)$ și $B(-3,6)$; *(Bacalaureat 2009)* b) $A\left(\frac{3}{2},-\frac{7}{3}\right)$ și $B\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{3}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

11. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(1,2)$ şi $C(2,-1)$. Să se calculeze distanţa de la punctul C la mijlocul segmentului $[AB]$. *(Bacalaureat 2009)*

12. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$ şi $B(m^2-1,0)$, $m\in\mathbb{R}$. Să se determine m astfel încât punctul $C(5,0)$ să fie mijlocul segmentului $[AB]$. *(Bacalaureat 2009)*

13. Să se determine coordonatele simetricului punctului A faţă de B dacă:

a) $A(2,-4)$ şi $B(1,-2)$; b) $A(5,-1)$ şi $B(3,1)$. *(Bacalaureat 2009)*

14. Să se determine coordonatele simetricului punctului A faţă de mijlocul segmentului $[BC]$ ştiind că $A(0,4)$, $B(0,2)$ şi $C(3,2)$.

15. Se consideră punctele $A(1,3)$, $B(3,-3)$, $C(-5,1)$.

a) Să se determine perimetrul triunghiului determinat de mijloacele laturilor triunghiului ABC.

b) Să se determine coordonatele centrului de greutate al triughiului ABC.

16. Triunghiul ABC are vârfurile $A(4,6)$, $B(3,4)$ şi $C(a,b)$. Dacă punctul $G\left(\frac{2}{3},4\right)$ este centrul de greutate al triunghiului, să se determine coordonatele vârfului C.

17. Să se arate că triunghiul cu vârfurile $A(5,-2)$, $B(-1,0)$ şi $C(1,6)$ este triunghi isoscel.

18. Se consideră punctele $A(-4,5)$, $B(4,2)$, $C(0,2)$, $D(0,6)$.

a) Să se determine coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{CD}$.

b) Să se calculeze $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CD}\right|$.

19. Se consideră punctele $A(1,2)$, $B(3,-6)$, $C(0,6)$.

Să se verifice dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari.

20. Se consideră punctele $A(-6,-3)$, $B(6,9)$, $C(0,-2)$.

a) Să se determine coordonatele vectorului $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$.

b) Să se determine coordonatele punctului M pentru care $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$.

21. Să se scrie ecuaţia dreptei ştiind că:

a) trece prin punctul $A(-3,2)$ şi are panta egală cu 1.

b) trece prin punctul $B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ şi are panta egală cu -1.

22. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(m^2,m)$ şi dreapta de ecuaţie $x+y+m=0$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care punctul A aparţine dreptei d. *(Bacalaureat 2009)*

23. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care punctul $A(2,3)$ se află pe dreapta $d:\ 2x-y+m=0$. *(Bacalaureat 2009)*

24. Să se determine numerele reale m şi n pentru care punctele $A(3,-1)$ şi $B(1,1)$ se află pe dreapta de ecuaţie $x+my+n=0$. *(Bacalaureat 2009)*

25. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctele:

a) $A(3,-2)$, $B(-1,-2)$; b) $A(3,2)$, $B(-2,-3)$; c) $M(-1,2)$ şi $N(-2,1)$.

26. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(3,0)$ şi intersectează axa Oy în

Scanned with OKEN Scanner

punctul cu ordonata 4. (*Bacalaureat 2009*)

27. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ știind că dreapta de ecuație $x+y-5=0$ trece prin punctele $A(a,b)$ și $B(a-1,4)$.

28. În reperul xOy se consideră punctele $A(2,-1)$ și $B(-2,a)$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine a astfel încât dreapta AB să treacă prin punctul $(0,0)$.

29. Să se determine distanța de la punctul $O(0,0)$ la punctul de intersecție a dreptelor $d_1: 2x-y-2=0$ și $d_2: x+3y-8=0$. (*Bacalaureat 2009*)

30. Se consideră punctele $A(1,a)$, $B(2,-1)$, $C(3,2)$, $D(1,-2)$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că dreptele AB și CD sunt paralele. (*Bacalaureat 2009*)

31. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că dreptele $2x-3y+1=0$ și $ax+6y+3=0$ sunt drepte paralele.

32. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care dreptele $d_1: -2x-my+3=0$ și $d_2: mx+y-5=0$ sunt paralele. (*Bacalaureat 2009*)

33. Se consideră în plan punctele $A(1,1)$, $B(-2,-1)$, $C(0,-1)$ și $D(3,1)$. Să se verifice că dreptele AB și CD sunt paralele.

34. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,-2)$, $B(1,2)$, $C(2,0)$. Să se determine coordonatele punctului D astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram.

35. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele:

a) $A(2,5)$, $B(1,5)$ și $C(3,m)$ să fie coliniare; (*Bacalaureat 2009*)

b) $A(2,3)$, $B(-1,m+2)$ și $C(3,m)$ să fie coliniare.

36. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(5,6)$ și $C(-1,1)$. Să se scrie ecuația medianei duse din vârful C în triunghiul ABC. (*Bacalaureat 2009*)

37. Să se determine lungimea medianei din A a triunghiului ABC, știind că vârfurile acestuia sunt:

a) $A(0,4)$, $B(-2,0)$ și $C(8,0)$; b) $A(2,4)$, $B(1,1)$ și $C(3,-1)$;

c) $A(2,3)$, $B(2,0)$ și $C(0,2)$. (*Bacalaureat 2009*)

38. Să se determine lungimea înălțimii duse din vârful O în triunghiul MON, unde $M(4,0)$, $N(0,3)$ și $O(0,0)$. (*Bacalaureat 2009*)

39. Se consideră dreptele $d_1: x-2y+2=0$, $d_2: 4x-y-13=0$, $d_3: 2x+3y-3=0$, care sunt suporturile laturilor triunghiului ABC. Să se determine coordonatele vârfurilor triunghiului ABC.

40. O dreaptă are panta $m=3$ și conține punctul $A(-1,-1)$. Să se determine abscisa punctului P de pe dreaptă care are ordonata egală cu -7.

41. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_n\left(\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^n, \log_3 9^n\right)$ și $B_n(-n,2n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine ecuația dreptei determinată de punctele B_1 și B_2.

b) Să se arate că $A_n = B_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, punctul A_n aparține dreptei A_1A_2. (*Bacalaureat 2009*)

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII RECAPITULATIVE
CLASA A XI-A

Partea I. Elemente de calcul matriceal şi sisteme de ecuaţii liniare

I. Matrice

II. Determinanţi

III. Sisteme de ecuaţii liniare

Partea II. Elemente de analiză matematică

1. Limite de funcţii
2. Funcţii continue
3. Funcţii derivabile
4. Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor

Partea I. *Elemente de calcul matriceal şi sisteme de ecuaţii liniare*

I. MATRICE

- Dacă $A,B\in M_{m,n}(\mathbb{C}), A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$, atunci $A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}, \forall i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$.
- $O_{m,n}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$ este **matricea nulă**, de tip (m,n). $I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$ este **matricea unitate** de ordinul n.

Operaţii cu matrice.

Fie $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), A,B\in M_{m,n}(\mathbb{C})$.

1. Adunarea matricelor.

- **Suma** matricelor A,B este matricea $C=(c_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{C}),,$

$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$.

Proprietăţi:

a) $(A+B)+C=A+(B+C), \forall A,B,C\in M_{m,n}(\mathbb{C})$;

b) $O_{m,n}$ este element neutru: $A+O_{m,n}=O_{m,n}+A=A$;

c) Matricea $-A=(-a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ este opusa matricei A:

$A+(-A)=(-A)+A=O_{m,n}, \forall A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$.

2. Înmulţirea matricelor cu scalari

Fie $\alpha\in\mathbb{C}, A=(a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{C})$. Matricea $\alpha A=(\alpha a_{ij})$ se numeşte produsul matricei A cu constanta α.

3. Înmulţirea matricelor

Fie $A=(a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{C}), B=(b_{ij})\in M_{n,p}(\mathbb{C})$.

Produsul matricelor A şi B (în această ordine) este matricea $C=(c_{ij})\in M_{m,p}(\mathbb{C})$, unde

$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,p}$.

Proprietăţi

a) $(AB)C=A(BC), \forall A\in M_{m,n}(\mathbb{C}), B\in M_{n,p}(\mathbb{C}), C\in M_{p,q}(\mathbb{C})$;

b) $A(B+C)=AB+AC, \forall A\in M_{m,n}(\mathbb{C}), B,C\in M_{n,p}(\mathbb{C})$,

$(A+B)C=AC+BC, \forall, A,B\in M_{m,n}(\mathbb{C}), C\in M_{n,p}(\mathbb{C})$;

c) Matricea unitate de ordinul n este element neutru pe mulţimea $M_n(\mathbb{C})$:

$I_n\cdot A=A\cdot I_n=A, \forall A\in M_n(\mathbb{C})$.

4. Transpunerea

Dacă $A=(a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{C})$, **transpusa matricei** A este matricea $A\in M_{n,m}(\mathbb{C})$, obţinută din matricea A prin schimbarea liniilor în coloane sau a coloanelor în linii.

Proprietăţi:

a) ${}^t(A\pm B)={}^tA\pm{}^tB$; b) ${}^t(AB)={}^tB\cdot{}^tA$; c) ${}^t({}^tA)=A$.

Scanned with OKEN Scanner

1. Consumul de apă (exprimat în m^3), măsurat de apometrele a trei scări de bloc pe o perioadă de o lună, este consemnat în următorul tabel matriceal:

Nr. săptămânii / Nr. scării	Săptămâna I	Săptămâna a II-a	Săptămâna a III-a	Săptămâna a IV-a
1	50	60	40	70
2	72	45	60	55
3	64	58	60	68

a) Să se interpreteze datele din coloana a II-a.
b) Ce reprezintă numerele 64, 40 şi 55?
c) După modelul $40 = a_{13}$ să se completeze: $50 = ...$; $58 = ...$; $68 = ...$; $72 = ...$.

2. Se dă matricea $A \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 6 \\ -1 & 4 & -4 & -5 \\ -3 & 2 & 9 & -8 \end{pmatrix}$.

a) Să se precizeze tipul matricei A.
b) Să se determine elementele: a_{23}, a_{31}, a_{34}, a_{12}.
c) Să se calculeze $a_{31} \cdot a_{13} + a_{11} \cdot a_{33} - (a_{24})^2 + 2a_{32}$.

3. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Să se precizeze:

a) diagonala principală; b) diagonala secundară; c) $\mathrm{Tr}(A)$; d) ${}^tA$.

4. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & -7 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Să se precizeze mulţimea matricelor căreia îi aparţin matricele A şi B.
b) Să se calculeze $\mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) + \mathrm{Tr}({}^tA) - 2 \cdot \mathrm{Tr}({}^tB)$.

5. Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ din egalităţile de matrice:

a) $\begin{pmatrix} x & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & y \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -3 & 4x \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -C_2^1 \\ -y & 1 \end{pmatrix}$.

6. Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ din egalităţile de matrice:

a) $\begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 3^y \end{pmatrix} = I_2$; b) $\begin{pmatrix} 4^x - 16 & 0 \\ 0 & \lg y - 1 \end{pmatrix} = O_2$.

7. Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ din egalităţile de matrice:

a) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ x^2 - 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3 & 2y-x \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{x} & 2 \\ x - \sqrt[3]{y} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ din egalităţile de matrice:

a) $\begin{pmatrix} -3 & b+2 \\ 5c-1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & c \\ 3^2 & a + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a\sqrt{2} - 1 & 1 \\ -1 & b^2 - 3 \\ 0 & C_4^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{6} - 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2c \end{pmatrix}$.

Scanned with OKEN Scanner

9. Să se determine $a, b, x \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea $A = \begin{pmatrix} a^2-3a+2 & b-6 & x^2-4 \\ \lg(x-1) & a^2-1 & b^2-36 \end{pmatrix}$ să reprezinte matricea nulă.

10. Să se determine $x, y, z, u \in \mathbb{R}$ astfel încât matricele să fie egale cu matricea unitate:

a) $A = \begin{pmatrix} 5^{x^2-9} & \lg(y-3) \\ 3^{z-\frac{1}{2}} - \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$;

b) $B = \begin{pmatrix} |x-3| & 2^y-8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & |u+2| & 4^z-5\cdot 2^{z-1}+1 \end{pmatrix}$.

11. Să se determine $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ din egalitatea: $\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & a \\ b & \sin 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & \operatorname{ctg} 45^\circ \\ \operatorname{tg} 30^\circ & d \end{pmatrix}$.

12. Se dau matricele: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ şi $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se precizeze tipul fiecărei matrice.

b) Să se calculeze: $A+B$, $A-B$, $A-{}^tC$, $B+{}^tC$.

13. În mulţimea $M_2(\mathbb{R})$ notăm cu ${}^tA$ transpusa matricei A.

a) Să se calculeze $I_2 + {}^t(I_2)$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Să se demonstreze că pentru orice $A \in M_2(\mathbb{R})$ şi $m \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea ${}^t(mA) = m \cdot {}^tA$.

c) Să se determine $A \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $A + {}^tA = O_2$, unde O_2 este matricea nulă de ordinul 2.

14. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $2A$, $-3B$ şi $2(A-2B)$.

b) Să se determine matricea $X \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ ştiind că $X + 4A = 2B$.

15. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ să se calculeze $x^2 + y^2 - xy$.

16. Să se determine $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea

$$2\cdot\begin{pmatrix} 3 & x \\ -4 & 2 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} y & x-1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9y & 4 \\ z & 2x+t \end{pmatrix}.$$

17. Să se determine matricea X ştiind că:

a) $3X + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 2! & C_3^1 & 0 \\ \lg 10 & A_3^2 & (-1)^3 \end{pmatrix}$; b) $2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{4} & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

18. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3^x & 5 \\ 4 & \log_2 y \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 27 & 12 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$. Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $3 \cdot A = {}^tB$.

19. Fie şirul (a_n) o progresie aritmetică şi matricele $A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & a_3 + a_1 \\ 6 & a_5 - a_2 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} -2 & \frac{8}{3} \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine primul termen și rația progresiei știind că $4A-3B=O_2$.

20. Să se determine matricele $X,\ Y\in M_2(\mathbb{R})$ știind că: $X+Y=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $X-Y=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 6 & -8\end{pmatrix}$.

21. Să se determine matricele $X,\ Y\in M_{2,3}(\mathbb{Z})$ știind că: $X-2Y=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 7 & -1 & -7\end{pmatrix}$ și $2X+3Y=\begin{pmatrix}-7 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 7\end{pmatrix}$.

22. Se dau matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$. Să se calculeze $A\cdot B,\ B\cdot A,\ A^2,\ B^2$.

23. Să se calculeze produsele $A\cdot B$ și $B\cdot A$ știind că: $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

24. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$. Dacă $f(X)=-X^2+2X-3I_2$, să se calculeze $f(A)+f(B)$.

25. Se dau matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. Să se calculeze $2BA+{}^t({}^tA\cdot B)$.

26. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 3 & 3\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $AB-BA$. b) Să se rezolve ecuația $A\cdot X=B$, unde $X\in M_2(\mathbb{R})$.

c) Să se demonstreze că matricea A verifică egalitatea: $A^2-2A+I_2=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

27. Se consideră mulțimea matricelor $G=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\middle|\ a,\ b\in\mathbb{Z}\right\}$.

a) Dacă $A,\ B\in G$, să se demonstreze că $A+B\in G$.

b) Dacă $A,\ B\in G$, să se demonstreze că $A\cdot B\in G$.

c) Să se arate că matricea $C\in G$, obținută pentru $a=5$ și $b=3$, verifică relația $C^2=10C-16I_2$.

(Bacalaureat 2009)

28. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to M_3(\mathbb{R}),\ f(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 2x^2+2x\\ 0 & 1 & 4x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $f(1)+f(0)$.

b) Să se arate că $f(1)\cdot f(-1)=I_3$, unde I_3 este matricea unitate de ordin 3.

c) Să se demonstreze că $f(x+y)=f(x)\cdot f(y),\ \forall x,\ y\in\mathbb{R}$. *(Bacalaureat 2009)*

29. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{X\in M_2(\mathbb{R})\middle|\ X^2=-I_2\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se verifice că $A \in G$. b) Să se demonstreze că $\left(\frac{1}{2}(X+I_2)\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot X,\ \forall X \in G$.

c) Să se demonstreze că orice matrice pătratică X pentru care avem $AX = XA$ este este de forma $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. *(Bacalaureat 2009)*

30. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $AB = BA$.

b) Să se verifice că $A^2 = 4(A - I_2)$, unde $A^2 = A \cdot A$.

c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^3 - aA^2 + 4A = O_2$. *(Bacalaureat 2009)*

31. În mulţimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ şi $X(a) = I_2 + aA,\ a \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze A^3. b) Să se verifice că $X(a)\cdot X(b) = X(a+b+ab),\ \forall a, b \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze suma $X(1) + X(2) + X(3) + \ldots + X(2010)$.

32. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ în $M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se verifice că $AB = BA$. b) Să se calculeze $A^2 + B^2$.

c) Să se arate că $C^4 = 5^4 \cdot I_2$, unde $C = A + B$. *(Bacalaureat 2009)*

33. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2. b) Să se verifice că $AB - 2B = O_2$.

c) Să se arate că dacă $X \in M_2(\mathbb{R})$ şi $AXB = O_2$, atunci suma elementelor matricei X este zero. *(Bacalaureat 2009)*

34. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se verifice egalitatea $A^2 = (2x-2)\cdot A - (x^2 - 2x)\cdot I_2$.

b) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $A^2 = 2A$.

II. DETERMINANŢI

Determinantul unei matrice pătratice

- **Determinantul de ordinul 2.**

Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, atunci determinantul matricei A sau **determinantul de ordinul 2** este numărul $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

- Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ atunci determinantul matricei A **(determinantul de ordinul 3)** este

Scanned with OKEN Scanner

numărul: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$ (regula lui Sarrus)

$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix}$

- Fie $A=(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}), A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Se numeşte **minorul elementului** a_{ij} determinantul de ordinul $n-1$ obţinut din A suprimând linia i şi coloana j pe care se află acest element. Se notează d_{ij}.

Se numeşte **complementul algebric** al **elementului** a_{ij}, numărul $\delta_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot d_{ij}$.

✓ Calculul determinantului de ordinul n folosind **regula minorilor** sau dezvoltarea după elementele unei linii sau coloane:

a) $\det(A)=a_{i1}\delta_{i1}+a_{i2}\delta_{i2}+\dots+a_{in}\delta_{in}, i=\overline{1,n}$ (**dezvoltarea după linia** i);

b) $\det(A)=a_{1j}\delta_{1j}+a_{2j}\delta_{2j}+\dots+a_{nj}\delta_{nj}, j=\overline{1,n}$ (**dezvolvarea după coloana** j).

Aplicaţii ale determinanţilor în geometrie.

a) Ecuaţia dreptei determinate de punctele $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ este: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$.

b) Condiţia de coliniaritate a punctelor $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$ este $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$.

c) Distanţa de la punctul $A(x_0,y_0)$ la dreapta $(h): ax+by+c=0$ este $d(A,(h))=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

d) Aria suprafeţei triunghiulare (ABC), dacă $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$, este:

$A_{(ABC)}=\dfrac{1}{2}\cdot|\Delta|$, unde $\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

1. Să se calculeze următorii determinanţi de ordinul doi:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{8} \\ \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 2^x & 1 \\ 1 & 2^{-x} \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} \lg 10 & -1 \\ 2 & \lg 10 \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} \sqrt{3}+\sqrt{2} & 3 \\ -2 & \sqrt{3}-\sqrt{2} \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} C_4^2 & 1 \\ A_5^2 & 3! \end{vmatrix}$.

2. Să se calculeze determinanţii de ordinul trei:

Scanned with OKEN Scanner

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & -8 \\ 1 & -5 & 10 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Să se calculeze următorii determinanți folosind proprietățile determinanților:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & 10 & 6 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} x & y & 3 \\ x & y & 1 \\ x & y & 2 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} x+y & 1 & z \\ y+z & 1 & x \\ z+x & 1 & y \end{vmatrix}$.

4. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ din relațiile:

a) $\begin{vmatrix} x & 2x \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 12$; b) $\begin{vmatrix} x+1 & -3 \\ x^2 & 1 \end{vmatrix} = 1$; c) $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 \\ x+3 & 2x \end{vmatrix} = -2$; d) $\begin{vmatrix} 2^x & 8 \\ 4 & 2^x \end{vmatrix} = 0$;

e) $\begin{vmatrix} \log_2 x^2 & 4 \\ \log_2 x & 3 \end{vmatrix} = 6$; f) $\begin{vmatrix} C_x^2 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; g) $\begin{vmatrix} 2 & \sqrt{x-3} \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$; h) $\begin{vmatrix} \sqrt{x-1} & -1 \\ 3 & \sqrt{x-1} \end{vmatrix} = 5$.

5. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x-1 & 1 \\ -1 & x+2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3x & x \\ 4x & 1 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$.

6. Fie determinantul $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

a) Să se calculeze $D(4)$.

b) Să se rezolve ecuația $D(x) = 0$.

c) Să se rezolve ecuația $D(2^x) = 0$.

7. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde x_1, x_2, x_3 sunt soluțiile ecuației $x^3 - 3x + 2 = 0$.

a) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$.

b) Să se arate că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$.

c) Să se calculez valoarea determinantului d.

(Bacalaureat 2009)

8. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $a = 2$, $b = 1$ și $c = -1$, să se calculeze d.

b) Să se verifice că $d = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\begin{vmatrix} 2^x & 3^x & 5^x \\ 5^x & 2^x & 3^x \\ 3^x & 5^x & 2^x \end{vmatrix} = 0$.

(Bacalaureat 2009)

Scanned with OKEN Scanner

9. Se consideră matricele $X=\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}$; $Y=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$, $A=X\cdot {}^tY$ şi $B(a)=aA+I_3$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $A=\begin{pmatrix}1&3&4\\3&9&12\\-4&-12&-16\end{pmatrix}$.

b) Să se calculeze $\det(A)$.

c) Să se arate că $\det B(-1)\neq 0$.

10. Se consideră determinantul $D(a)=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze valoarea determinantului pentru $a=-1$.

b) Să se demonstreze că $D(a)=-(a-1)^2(a+2)$, $\forall a\in\mathbb{R}$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $D(a)=-4$. *(Bacalaureat 2009)*

11. Se consideră determinantul $D(a,b,x)=\begin{vmatrix}1&x&ab\\1&a&bx\\1&a&ax\end{vmatrix}$, unde $a, b, x\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $D(1,1,0)$.

b) Să se arate că $D(a,a,x)$ nu depinde de x.

c) Să se rezolve ecuaţia $D(a,b,x)=0$, unde a,b sunt numere reale pozitive. *(Bacalaureat2009)*

12. Folosind proprietăţile determinanţilor, să se arate că:

a) $\begin{vmatrix}x+y&2&z\\y+z&2&x\\z+x&2&y\end{vmatrix}=0$; b) $\begin{vmatrix}x+y&y&x\\x-y&y&x\\y-x&y&x\end{vmatrix}=0$.

13. Să se verifice egalităţile:

a) $\begin{vmatrix}x&y&z\\a&b&c\\a+x&b+y&c+z\end{vmatrix}=0$; b) $\begin{vmatrix}1&1&1\\x^2&y^2&z^2\\yz&xz&xy\end{vmatrix}=(x-y)(x-z)(z-y)(x+y+z)$.

14. Se dă matricea $A=\begin{pmatrix}3&m+2&1\\2&0&1\\3&5-m&3\end{pmatrix}$, $m\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $\det(A)$.

b) Să se afle m pentru care $\det(A)=1$.

15. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât următoarele matrice să aibă determinantul nenul:

a) $A=\begin{pmatrix}m-4&7\\2&m+1\end{pmatrix}$; b) $B=\begin{pmatrix}m-1&m&2\\1&1&-3\\0&m-1&1\end{pmatrix}$; c) $C=\begin{pmatrix}1&3+m&1\\1&m+1&m\\1&1&m+1\end{pmatrix}$.

Scanned with OKEN Scanner

16. Se consideră matricea $A(x,m)=\begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ x & -1 & 2 \\ 3 & x & m \end{pmatrix}$, $x, m \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $\det(A(-1,3))$.

b) Să se calculeze $\det(A(x,m))$.

c) Să se determine valorile parametrului real m pentru care $\det(A) \neq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

17. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Se notează $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{de } n \text{ ori}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $A + A^2 = 2A$.

b) Să se determine matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$, $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, astfel încât $\det(X+A)=2$.

c) Știind că $A^n = A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $A + 2A^2 + \ldots + nA^n = \frac{n(n+1)}{2} \cdot A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(Bacalaureat 2009)

18. Să se determine ecuația dreptei determinată de punctele:

a) $A(4,-3)$ și $B(-5,2)$; b) $E(-2,-6)$ și $F(0,-1)$.

19. Se dau punctele $A(1,4), B(5,1)$ și $C(-12,-8)$. Să se scrie ecuațiile laturilor triunghiului ABC.

20. Se consideră triunghiul ABC și punctele $M(4,-1)$, $N(0,1)$ și $P(-4,-3)$ mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$.

a) Să se scrie ecuațiile laturilor triunghiului ABC.

b) Să se scrie ecuațiile medianelor triunghiului ABC.

21. Fie punctele $A(0,4)$, $B(3,0)$ și $C\left(\frac{3+4\sqrt{3}}{2}, \frac{4+3\sqrt{3}}{2}\right)$ vârfurile triunghiului ABC.

a) Să se arate că triunghiul ABC este echilateral.

b) Să se scrie ecuația medianei din vârful C.

c) Să se scrie ecuația înălțimii din B.

d) Să se scrie ecuația bisectoarei din A.

22. Să se stabilească dacă următoarele triplete de puncte sunt coliniare:

a) $A(0,2)$, $B(4,4)$, $C(-2,1)$; b) $A(1,3), B(-1,9)$, $C\left(\frac{1}{3}, 5\right)$;

c) $A(-1,3), B(0,4)$, $C(-2,2)$; d) $A(1,a)$, $B(-2,3)$, $C\left(-1, \frac{6+a}{3}\right)$.

23. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(m,2), B(m-1,4)$, $C(-1,8)$ să fie puncte coliniare.

24. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(3,m+5), B(m-1,1)$, $C(-6,0)$ să nu fie coliniare.

25. Se dau punctele $A(3,1)$, $B(-2,6)$.

a) Să se scrie ecuația dreptei AB.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se verifice dacă punctele A, B şi $C(-1,5)$ sunt puncte coliniare.

c) Să se determine punctele $M\left(3m^2-1, 2m\right)$ coliniare cu A şi B.

26. Să se determine numerele reale a şi b astfel încât dreapta de ecuaţie $ax+by+6=0$ să conţină punctele $A(1,9)$ şi $B(-1,3)$.

27. Să se determine parametrul $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(1,-5)$, $B(m,m)$ şi $C(-2,1)$ să fie vârfurile unui triunghi.

28. În reperul xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(1,2)$ şi $C_n(n,-n)$, $n\in\mathbb{Z}$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei C_4C_2.

b) Să se arate că oricare ar fi $n\in\mathbb{Z}^*$ punctele O, C_n, C_{n+1} sunt coliniare.

c) Să se calculeze aria triunghiului ABC_3. *(Bacalaureat 2009)*

29. În reperul xOy se consideră punctele $A_n\left(\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^n, \log_3 9^n\right)$ şi $B_n(-n,2n)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctele B_1 şi B_2.

b) Să se arate că $A_n=B_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

c) Să se demonstreze că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, punctul A_n aparţine dreptei A_1A_2.

(Bacalaureat 2009)

30. Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile:

a) $A(0,2), B(-2,4), C(2,-3)$; b) $M(2,6), N(4,0), P(0,4)$;

c) $E(-3,6), F(-1,3), G(-2,-2)$; d) $K(2,3), L(-2,4), M(1,2)$.

31. Se consideră patrulaterul $ABCD$ cu vârfurile $A(-4,0)$, $B(5,-3)$, $C(3,3)$ şi $D(0,4)$. Să se calculeze aria patrulaterului $ABCD$.

32. Se dau punctele $A(3,2)$, $B(6,-2)$ şi C piciorul perpendicularei din punctul A pe axa Ox. Să se calculeze aria triunghiului ABC.

33. Fie $A(-2,4)$, $B(3,1)$ şi C simetricul punctului A faţă de originea reperului xOy. Să se calculeze aria triunghiului ABC.

34. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că $A_{(ABC)}=14$, $A(-3,2)$, $B(3,4)$ şi $C(m,m-1)$.

35. Fie triunghiul ABC cu vârfurile $A(-4,0)$, $B(1,5)$ şi $C(2,-2)$. Dacă punctul D este mijlocul laturii $[AB]$ să se calculeze aria triunghiului BCD.

36. Se dau punctele $A(-2,-4)$, $B(2,6)$, $C(0,-4)$ şi $D(x,x-2)$. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $A_{(ABC)}=A_{(BCD)}$.

37. Se dau punctele $A(2,-1)$, $B(6,3)$ şi dreapta $d: x-2y+6=0$. Să se determine coordonatele punctului $C\in d$ astfel încât $A_{(ABC)}=8$.

38. Să se determine aria triunghiului determinat de dreptele $d_1: x+2y-3=0$, $d_2: 3x-y+1=0$, $d_3: 3x+y-5=0$.

39. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n\left(n,2^n\right)$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Să se demonstreze că punctele O, A_1, A_2 sunt coliniare.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se determine numărul de drepte care trece prin cel puţin două dintre punctele O, A_0, A_1, A_2.

c) Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, $n\in\mathbb{N}$. (*Bac 2009*)

40. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n(n,2n+1)$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Să se determine ecuaţia dreptei A_1A_2.

b) Să se calculeze aria triunghiului OA_1A_2.

c) Să se arate că punctele $A_n(n,2n+1)$, $n\in\mathbb{N}$ sunt coliniare. (*Bacalaureat 2009*)

41. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(7,4)$, $B(a,a)$ şi $C(3,-2)$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $a=0$ să se calculeze aria triunghiului ABC.

b) Pentru $a=-2$ să se scrie ecuaţia dreptei BC.

c) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele B, C şi $M(x,-2)$ sunt coliniare pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

42. Se consideră punctele $A_n(n,n^2)$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Să se determine ecuaţia dreptei A_0A_1. b) Să se calculeze $A_{(A_0A_1A_2)}$.

c) Să se arate că oricare ar fi m, n, $p\in\mathbb{N}$, distincte două câte două, $A_{(A_mA_nA_p)}\in\mathbb{N}$. (*Bac 2009*)

43. În reperul xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n(n,n+2)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

a) Să se determine ecuaţia dreptei A_0A_1.

b) Să se demonstreze că punctele A_0, A_1, A_2 sunt coliniare.

c) Să se arate că aria triunghiului OA_nA_{n+1} nu depinde de numărul natural n. (*Bacalaureat 2009*)

44. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $AB: x+2y-4=0$ şi $BC: 3x+y-2=0$.

a) Să se determine coordonatele punctului B.

b) Pentru $A(4,0)$, $B(0,2)$, $C(1,-1)$, să se scrie ecuaţia medianei triunghiului ABC duse din vârful C.

c) Pentru $A(4,0)$, $B(0,2)$, $C(1,-1)$ să se calculeze aria triunghiului ABC. (*Bacalaureat 2009*)

45. Se consideră matricea $M=\begin{pmatrix} x & y & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $x, y\in\mathbb{R}$. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(0,3)$, $O(0,0)$ şi $C_n(n+1,2-n)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze $\det(M)$. b) Să se arate că punctele A, B şi C_2 sunt coliniare.

c) Să se determine $n\in\mathbb{N}$ astfel încât aria triunghiului AOC_n să fie minimă. (*Bacalaureat 2009*)

III. SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

3.1. Matrice inversabile

- Matricea $A\in M_n(\mathbb{C})$ este **inversabilă** dacă există $B\in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB=BA=I_n$.

Se notează $B=A^{-1}$.

- $A\in M_n(\mathbb{C})$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0$.

- $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\cdot A^*$, unde A^* este **matricea adjunctă** a lui A şi se obţine din ${}^tA$, înlocuind

Scanned with OKEN Scanner

fiecare element al acesteia cu complementul algebric $\left(\delta_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot d_{ij}\right.$, unde d_{ij} este minorul elementului a_{ij}).

- Dacă A este matrice inversabilă, atunci:
  a) Soluţia ecuaţiei matriceale $AX=B$ este $X=A^{-1}B$.
  b) Soluţia ecuaţiei matriceale $XA=B$ este $X=BA^{-1}$.

1. Să se arate că următoarele matrice sunt inversabile:

$$A=\begin{pmatrix}1&-2\\3&2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2&9\\1&5\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}3!&2!\\3&2\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}1&3&0\\-2&-1&0\\0&2&1\end{pmatrix};\ E=\begin{pmatrix}-1&0&5\\2&-1&0\\1&4&-1\end{pmatrix}.$$

2. Să se arate că următoarele matrice nu sunt inversabile:

$$A=\begin{pmatrix}2&-3\\4&-6\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3^2&(-1)^2\\9&1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}4&2&0\\5&1&0\\6&3&0\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&1&-4\\3&5&6\end{pmatrix}.$$

3. Să se determine inversele următoarelor matrice:

$$A=\begin{pmatrix}8&-2\\-3&1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{2}{3}\\6&-8\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&5&0\\2&-3&1\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}4&1&1\\0&1&-3\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

4. Să se determine parametrul $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matricele să fie inversabile:

a) $\begin{pmatrix}m&1\\8&2\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}3&2m+1\\-1&1\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}1&2&m\\3&-1&2\\1&1&4\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}m-1&1&2\\m+2&-1&1\\1&3&0\end{pmatrix}$.

5. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}m&3&2\\m+1&m&0\\m+2&1&-1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^{-1}=A^*$, unde A^* este matricea adjunctă a matricei A.
b) Pentru $m=1$ să se determine A^{-1}.

6. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea A să fie inversabilă pentru oricare $x\in\mathbb{R}$ în cazurile:

a) $A=\begin{pmatrix}x&m&-1\\2&x&3\\-1&1&1\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}4&x&3\\x&-1&x\\m-1&1&m\end{pmatrix}$; c) $A=\begin{pmatrix}2&0&m+1\\x&1&x\\-3&x&-2\end{pmatrix}$.

7. Să se determine matricea A ştiind că:

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}$; b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$; c) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.

8. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se determine A^{-1}.

b) Să se arate că $\left(B^2+A^{-1}\right)=6\cdot I_2$.

9. Se dau matricele $A=\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Dacă $x=z=0$ şi $y=-1$, să se arate că $A^{-1}=B$.

b) Să se rezolve ecuaţia $B\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & 5\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

10. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ şi mulţimea de matrice

$G=\left\{M(x,y)\mid M(x,y)=x\cdot I_2+y\cdot A,\ x,y\in\mathbb{R}\right\}\subset M_3(\mathbb{R})$.

a) Să se determine inversa matricei $M(1,1)$.

b) Să se determine matricele inversabile din G.

11. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Să se arate că A nu este matrice inversabilă.

b) Să se arate că matricea $A+2I_3$ este inversabilă şi să se calculeze inversa ei.

12. Se dau matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 6\\ -3 & 3 & 9\end{pmatrix}$ şi $B=A-I_3$.

a) Să se arate că matricea A nu este inversabilă. b) Să se arate că $B^{-1}=\frac{1}{9}A-I_3$.

13. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in M(\mathbb{Q})$.

a) Să se calculeze $\det\left(A^2\right)$. b) Să se determine $x, y, z, t\in\mathbb{Q}$ ştiind că $A\cdot B=I_2$.

c) Dacă $A\cdot B=I_2$, să se calculeze $S=\left(B^{-1}-A\right)^2$. *(Bacalaureat 2009)*

14. Să se rezolve ecuaţiile matriceale:

a) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -7\\ 5 & -9\end{pmatrix}$; b) $X\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 10\end{pmatrix}$; c) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 8\\ -3 & 4\end{pmatrix}$.

15. Să se rezolve ecuaţiile matriceale: a) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-2 & 7\\ -3 & 8\end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0 & -1 & -3\\ 1 & 5 & 4\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$; c) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

16. Să se determine matricea X din egalităţile:

Scanned with OKEN Scanner

a) $X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2\\ -4\\ 5\end{pmatrix}$.

17. Să se determine matricea X din egalităţile:

a) $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -7 & 5\\ -15 & -17 & 12\end{pmatrix}$.

18. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}a-1 & 1\\ a & 2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}$, $a, x, y\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze a astfel încât A să nu fie matrice inversabilă.

b) Pentru $a=3$ să se verifice că $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$.

c) Pentru $a=3$ să se rezolve ecuaţia matriceală $A\cdot X=B$. *(Bacalaureat 2009)*

3.2. Sisteme de ecuaţii liniare

Clasificarea sistemelor de ecuaţii liniare:

a) **Sistem compatibil** dacă are cel puţin o soluţie:
- determinat – dacă are o singură soluţie.
- nedeterminat – dacă are o infinitate de soluţii.

b) **Sistem incompatibil** dacă nu are soluţii.

- **Metode de rezolvare**

✓ **Metoda matriceală**

Fie sistemul (S) sub forma $AX=B$. Dacă $m=n$ şi A este inversabilă $\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$.

✓ **Regula lui Cramer**

- Un sistem (S) de n ecuaţii cu n necunoscute este de tip Cramer dacă $\det(A)\neq 0$

Teoremă (**regula lui Camer**): Un sistem de tip Cramer este compatibil determinat şi are soluţia dată de formulele $x_1=\frac{d_1}{d}, x_2=\frac{d_2}{d},\ldots, x_n=\frac{d_n}{d}$, unde $d=\det(A)$ şi d_k este determinant obţinut din d înlocuind coloana k cu coloana termenilor liberi, $k=\overline{1,n}$.

19. Să se scrie matricea sistemului, matricea termenilor liberi şi matricea necunoscutelor pentru sistemele de ecuaţii: a) $\begin{cases}2x+3y=8\\ 4x+5y=14\end{cases}$; b) $\begin{cases}x+y=-5\\ 3x-y=-3\end{cases}$; c) $\begin{cases}x-y+z=0\\ x+2y-z=0.\\ 4x-z=1\end{cases}$

20. Să se scrie sub formă matriceală şi să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii liniare:

a) $\begin{cases}2x-2y=1\\ -3x+4y=-3\end{cases}$; b) $\begin{cases}12x-3y=0\\ 8x+y=12\end{cases}$; c) $\begin{cases}x-3y=-7\\ -2x+4y=8\end{cases}$; d) $\begin{cases}\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}y=2\\ x+y=5\end{cases}$.

21. Să se scrie sub formă matriceală şi să se rezolve sistemele de ecuaţii liniare:

a) $\begin{cases}2x+2y+z=1\\ x+4y+z=0\\ x+2y+2z=7\end{cases}$; b) $\begin{cases}x+y+2z=3\\ -x-2y+z=2;\\ x+y-2x=-1\end{cases}$ c) $\begin{cases}x+2y+5z=7\\ x-y+z=-6\\ 2x+y+2z=-3\end{cases}$.

Scanned with OKEN Scanner

22. Să se rezolve prin regula lui Cramer sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+3z=2; \\ x+z+2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-z=7 \\ 3y+5z=-5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x-3y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$.

23. Să se rezolve prin metoda lui Gauss sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+2z=2; \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x-3y+2z=2 \\ x-5y+3z=7 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+3y+2z=2 \\ 3x+5y+6z=2. \\ 2x+y+4z=-1 \end{cases}$

24. Să se rezolve sistemele de ecuaţii liniare:

a) $\begin{cases} x-3y+3z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ 2x+4y+3z=9 \\ -2x+3y-2z=-1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x-2y-z=-4 \\ x+5y+4z=6 \\ 5x-2y+9z=8 \\ x+y+z=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x-2y+4z=-5 \\ 2x+y+3z=0 \\ x-3y+3z=-4 \\ 3x-5y+z=12 \end{cases}$.

25. Se consideră sistemul $\begin{cases} mx+y+z=m^2-3 \\ 5x-2y+z=-2 \\ (m+1)x+2y+3z=-2 \end{cases}$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$, ştiind că $\det(A)=-12$, unde A este matricea sistemului.

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să aibă soluţia $(1,2,-3)$.

c) Pentru $m=-1$ să se rezolve sistemul de ecuaţii. *(Bacalaureat 2009)*

26. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$ şi $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ m & -1 & 4 \end{pmatrix}$ matricea sistemului.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $(2,\ 1,\ -1)$ să fie soluţie a sistemului.

b) Să se rezolve ecuaţia $\det(A)=m^2-3m$, $m\in\mathbb{R}$.

c) Pentru $m=-5$ să se rezolve sistemul de ecuaţii. *(Bacalaureat 2009)*

27. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+ay+a^2z=a \\ x+by+b^2z=b \\ x+cy+c^2z=c \end{cases}$, unde $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ sunt distincte două câte două.

a) Să se rezolve sistemul de ecuaţii pentru $a=0$, $b=1$, $c=2$.

b) Să se verifice că $\det(A)=(a-b)(b-c)(c-a)$, unde A este matricea asociată sistemului.

c) Să se demonstreze că soluţia sistemului nu depinde de numerele reale a, b, c. *(Bac2009)*

28. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x+3y+z=b \\ ax-2y+z=5 \\ 4x+y+z=4 \end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $\det(A)$, unde A este matricea asociată sistemului de ecuaţii.

b) Pentru $a=8$ şi $b=2$ să se rezolve sistemul.

c) Să se determine $b\in\mathbb{R}$ ştiind că (x_0,y_0,z_0) este soluţie a sistemului şi $3x_0+y_0+z_0=4$.

Scanned with OKEN Scanner

29. Se consideră sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} x+4y+4z=15 \\ 3x+(a+4)y+5z=22 \\ 3x+2y+(3-a)z=16 \end{cases}$. $a\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $a=1$ să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

b) Să se arate că tripletul $(7,\ 1,\ 1)$ nu poate fi soluţie a sistemului, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

c) Să se determine soluţia (x_0,y_0,z_0) pentru care $y_0+z_0=3$. *(Bacalaureat 2009)*

30. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că tripletul $(0,\ 3,\ 1)$ este soluţie a sistemului pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine valorile lui $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul admite soluţie unică.

c) Pentru $m\neq 3$ să se rezolve sistemul. *(Bacalaureat 2009)*

31. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x-5y+4z=0 \\ -3x+y+z=-1, \\ 2x-z=a \end{cases}$ $a\in\mathbb{Z}$.

a) Să se calculeze $\det(A)$ unde A este matricea asociată sistemului.

b) Pentru $a=1$ să se rezolve sistemul.

c) Să se determine cea mai mica valoare a lui $a\in\mathbb{N}$ pentru care soluţia sistemului este formată din trei numere naturale. *(Bacalaureat 2009)*

32. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+ay+2z=1 \\ x+(2a-1)y+3z=1, \\ x+ay+(a-3)z=1 \end{cases}$ $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $\det(A)=a^2-6a+5$, unde A este matricea asociată sistemului.

b) Să se rezolve ecuaţia $\det(A)=0$.

c) Pentru $a=0$ să se rezolve sistemul în mulţimea numerelor reale. *(Bacalaureat 2009)*

33. Fie sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x+ay+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $a=0$ să se calculeze A^2, unde A este matricea asociată sistemului.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care A este matrice inversabilă.

c) Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$ să se rezolve sistemul. *(Bacalaureat 2009)*

34. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+2y+4z=0 \\ a^2x+4y+16z=0 \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $a=1$ să se calculeze $\det(A)$, unde A este matricea asociată sistemului.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A)\neq 0$.

c) Să se rezolve sistemul pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{2,4\}$. *(Bacalaureat 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

35. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x-ay-z=0 \\ x+4y-2z=16 \\ x-2y+2z=-6 \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea A asociată sistemului să fie inversabilă.

b) Să se calculeze A^2.

c) Să se rezolve sistemul pentru $a=1$. *(Bacalaureat 2009)*

Partea II. Elemente de analiză matematică

1. LIMITE DE FUNCŢII

1.1. Mulţimi de puncte pe dreapta reală

Mulţimi mărginite

• Numărul real $m\in\mathbb{R}$ se numeşte **minorant (majorant)** al mulţimii $A\subset\mathbb{R}$, dacă $m\le x, (x\le m), \forall x\in A$.

• Mulţimea $A\subset\mathbb{R}$ se numeşte **mărginită inferior (superior)** dacă are cel puţin un minorant (majorant).

• Mulţimea $A\subset\mathbb{R}$ se numeşte **mărginită** dacă este mărginită inferior şi superior.

• O mulţime $A\subset\mathbb{R}$ se numeşte **nemărginită inferior** dacă nu are nici un minorant.

• O mulţime $A\subset\mathbb{R}$ se numeşte **nemărginită superior** dacă nu are nici un majorant.

• Numărul real m se numeşte **marginea inferioară** a mulţimii $A\subset M$, dacă este cel mai mare minorant al mulţimii A. Se notează $\inf A$.

• Numărul real M, notat $\sup A$, se numeşte **margine superioară** a mulţimii $A\subset\mathbb{R}$, dacă este cel mai mic majorant al mulţimii A.

• Fie $x_0\in\mathbb{R}$. Se numeşte **vecinătate** a punctului x_0, o mulţime V cu proprietatea că există un interval deschis $I\subset\mathbb{R}$ astfel încât $x_0\in I\subset V$.

• Mulţimea V se numeşte vecinătate a lui $+\infty$, dacă conţine un interval de forma $(a,+\infty), a\in\mathbb{R}$.

• Mulţimea V se numeşte vecinătate a lui $-\infty$, dacă conţine un interval de forma $(-\infty,a), a\in\mathbb{R}$.

• Dacă $A\subset\mathbb{R}$, numărul $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ se numeşte **punct de acumulare** al mulţimii A, dacă pentru oricare vecinătate $V\in\mathscr{V}(x_0)$, mulţimea $V\cap A$ are cel puţin două elemente.

• Numărul $x_0\in A$ se numeşte **punct izolat** al mulţimii A, dacă nu este punct de acumulare al mulţimii A.

ASIMPTOTELE GRAFICULUI FUNCŢIILOR

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcţie astfel încât D admite pe $-\infty$, respectiv $+\infty$ ca puncte de acumulare.

- Asimptote orizontale

  Dreapta $y=a, a\in\mathbb{R}$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$, dacă $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$.

  Dreapta $y=a, a\in\mathbb{R}$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$, dacă $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$.

- Asimptote oblice

  Dacă există $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m\in\mathbb{R}^*$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=n\in\mathbb{R}$, dreapta $y=mx+n$ este

Scanned with OKEN Scanner

asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f.

Dacă există $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m\in\mathbb{R}^*$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=n\in\mathbb{R}$, dreapta $y=mx+n$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.

- Asimptote verticale

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ și $x_0\in\mathbb{R}$ punct de acumulare al lui D.

Dreapta $x=x_0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f dacă una din limitele laterale $f(x_0-0)$ sau $f(x_0+0)$ există și este infinită.

1. Care din următoarele mulțimi de numere reale sunt intervale:

a) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -3x+7>1\}$? b) $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-2x-3\le 0\}$?

c) $C=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x-3|\le 1\}$? d) $D=\{x\in\mathbb{R}\mid |x+4|>2\}$?

2. Să se scrie cu ajutorul intervalelor următoarele mulțimi de numere reale:

$A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-6x+5>0\}$; $B=\{x\in\mathbb{R}\mid 2^{x+3}\le 16^x\}$;

$C=\{x\in\mathbb{R}\mid \sqrt{x+3}<2\}$; $D=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \log_{\frac{1}{2}}(3x-1)\le 1\right\}$.

3. Se consideră mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \dfrac{x+2}{x-1}>4\right\}$ și $I=(1,2)$. Să se arate că $A=I$.

4. Fie mulțimile de numere reale $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le 3x-4\le 5\}$ și $B=\{x\in\mathbb{R}\mid |x-1|<2\}$.

a) Să se arate că $A=[2,3]$ și $B=(-1,3)$.

b) Să se determine mulțimile $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

5. Să se scrie cu ajutorul inegalităților următoarele relații:

a) $x\in[2,5)$; b) $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$; c) $x\in[-1,+\infty)$; d) $x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt[3]{2}\right)$.

6. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care următoarele intervale sunt intervale simetrice:

a) $(-5,x)$; b) $(2x-3,4)$; c) $\left[-x^2,2x-1\right]$; d) $\left[\dfrac{5-7x}{x+1},\dfrac{3x-5}{x-2}\right]$.

7. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $x^2\in[4,25]$.

8. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât intervalele I de numere reale să fie mulțimi nevide, știind că: a) $I=[-4x+3,2x-9]$; b) $I=\left(x^2-1,3\right)$; c) $I=\left(x,\dfrac{1}{x}\right)$; d) $I=\left[2\cdot 2^x,8^x\right]$.

9. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât intervalul $I=(2m-5,4m-3)$ să fie interval centrat în punctul $x_0=2$.

10. Dacă $x\in[-3,4]$ și $y\in[-2,3]$ să se arate că: a) $x+y\in[-5,7]$; b) $x^2+y^2\in[0,25]$.

11. Să se determine mulțimile de minoranți și majoranți pentru mulțimile:

a) $A=[-5,8]$; b) $B=(-2,2)$; c) $C=(3,7]$; d) $D=[-1,2]\cup\{3\}$;

e) $E=(0,3)\cup[5,+\infty)$; f) $F=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

12. Să se determine $\inf A$ și $\sup A$ dacă:

Scanned with OKEN Scanner

a) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-x-6=0\}$; b) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-5x<0\}$;

c) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid \log_4(x-2)\le 1\}$; d) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{1}{8}\le\left(\frac{1}{2}\right)^x<1\right\}$.

13. Să se arate că numărul $x_0=5$ este majorant pentru mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}\mid 3^{x-1}\le 27\}$.

14. Fie mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}\mid \log_2(1-x)<1\}$. Să se arate că $x_1=-2$ este minorant pentru mulțimea A și $x_2=\frac{3}{2}$ este majorant pentru A.

15. Să se arate că următoarele mulțimi sunt nemărginite:

a) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2>4\}$; b) $A=\{x\in\mathbb{N}\mid 5 \text{ divide } x\}$;

c) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid |x-1|+3x\le 2\}$; d) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid \lg x>1\}$.

16. Să se arate că următoarele mulțimi sunt mărginite:

a) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2\le 36\}$; b) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid \lg(1-3x)<1\}$;

c) $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid |4x-5|<3\}$; d) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{1}{2}\le 2^{x+2}<16\right\}$.

17. Care dintre următoarele mulțimi V sunt vecinătăți pentru $x_0=1$, dacă:

a) $V=\left[0,\frac{3}{2}\right]$; b) $V=\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$; c) $V=(-2,2]$; d) $V=\left(-1,\frac{3}{2}\right)\cup\{2\}$?

18. Care dintre următoarele mulțimi V sunt vecinătăți pentru $+\infty$, dacă:

a) $V=(-1,+\infty)$; b) $V=(0,2011)\cup(2012,+\infty)$; c) $V=(-\infty,1)$; d) $V=\mathbb{N}$?

19. Care dintre următoarele mulțimi V sunt vecinătăți pentru $-\infty$, dacă:

a) $V=(-\infty,-1)$; b) $V=(-\infty,0]$; c) $V=(-1,+\infty)$; d) $V=(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$?

20. Să se arate că intervalul $V=(\log_3 2,\ \log_3 11)$ este vecinătate pentru numărul $x_0=2$.

21. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care mulțimea:

a) $V=(m+1,2m+7)$ este vecinătate pentru $x_0=-1$.

b) $V=\left(m^2-2m,\frac{7}{2}\right)$ este vecinătate pentru $x_0=3$.

22. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât mulțimea $V=(m^2-3m,m+5)$ este vecinătate pentru $x_0=m$.

23. Fie $A\subset\mathbb{R}$ nevidă. Să se determine $x_0\in A$ astfel încât A să nu fie vecinătate a lui x_0, dacă:

a) $A=[-2,3]$; b) $A=[0,2)$; c) $A=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$; d) $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

1.2. Calculul limitelor de funcții

24. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$, $x_0=2$ și $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1$. Să se determine o vecinătate $U\in V(2)$ cu proprietatea că $f(x)\in V$, $V\in V(1)$, $\forall x\in U$, știind că:

a) $V=(0,4)$; b) $V=(1,3)$.

25. Folosind definiția cu vecinătăți a limitei unei funcții într-un punct, să se arate că:

a) $\lim\limits_{x\to 3}(1-5x)=-14$ b) $\lim\limits_{x\to 1}(4x-1)=3$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-2}{x-4}=\frac{1}{2}$; d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

26. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât:

a) $\lim\limits_{x \to -2}\left[(2a+1)x+1\right]=3$; b) $\lim\limits_{x \to 1} 2^{(a+1)x}=64$.

27. Să se determine limitele laterale ale funcţiilor $f: D \to \mathbb{R}$, în punctele specificate, dacă:

a) $f(x)=\begin{cases} x+3, & x \le 1 \\ 5x+1, & x>1 \end{cases}$, $x_0=1$; b) $f(x)=\begin{cases} 3x-2, & x \le 2 \\ 2^x, & x>2 \end{cases}$, $x_0=2$;

c) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-1, & x \le 0 \\ 3x+2, & x>0 \end{cases}$, $x_0=0$; d) $f(x)=\begin{cases} \lg x, & x \in (0,1) \\ x^2-x, & x \in [1,+\infty) \end{cases}$, $x_0=1$.

28. Să se studieze existenţa limitelor funcţiilor $f: D \to \mathbb{R}$ în punctele specificate, în cazurile:

a) $f(x)=\begin{cases} 4x+1, & x \le -1 \\ 2x-1, & x>-1 \end{cases}$, $x_0=-1$; b) $f(x)=\begin{cases} 3x+2, & x \le -2 \\ -\dfrac{1}{2^x}, & x>-2 \end{cases}$, $x_0=-2$;

c) $f(x)=\begin{cases} \log_2\left(\dfrac{x}{2}\right), & x>4 \\ 2x-6, & x \le 4 \end{cases}$, $x_0=4$; d) $f(x)=\begin{cases} \sin x-\cos x, & x \in [0,\pi] \\ 2+\cos x, & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$, $x_0=\pi$.

29. Să se determine limitele laterale ale funcţiilor:

a) $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+4}{x-1}$ în punctul $x_0=1$;

b) $f: \mathbb{R}\setminus\{-2\} \to \mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x}{x+2}$, în punctul $x_0=-2$.

30. Să se studieze existenţa limitelor funcţiilor:

a) $f: \mathbb{R}\setminus\{\pm 2\} \to \mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$ în punctele $x_0 \in \{1, 2, -2\}$;

b) $f: \mathbb{R}\setminus\{-3\} \to \mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x}{(x+3)^2}$, în punctele $x_0 \in \{3, -3\}$

31. Să se determine parametrul real a astfel încât funcţiile $f: D \to \mathbb{R}$ să aibă limită în punctele specificate:

a) $f(x)=\begin{cases} 2x-a, & x \le 2 \\ x^2+1, & x>2 \end{cases}$, $x_0=2$; b) $f(x)=\begin{cases} (a+1)x+2, & x \le -1 \\ 3x^2-1, & x>-1 \end{cases}$, $x_0=-1$;

c) $f(x)=\begin{cases} a-\sqrt{x}, & x \ge 1 \\ \dfrac{3^x}{x-2}, & x<1 \end{cases}$, $x_0=1$; d) $f(x)=\begin{cases} x \cdot \log_2 a+3, & x \le 1 \\ 5+x, & x>1 \end{cases}$, $x_0=1$.

32. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to -1}(6x+9)$; b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}}(4x-3)$; c) $\lim\limits_{x \to -1}(2011+x)$;

d) $\lim\limits_{x \to +\infty}(3x-5)$; e) $\lim\limits_{x \to -\infty}(2x-7)$; f) $\lim\limits_{x \to +\infty}(1-2011x)$.

33. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to 0}\left(-2x^2+7x+6\right)$; b) $\lim\limits_{x \to -2}\left(3x^2+6x+7\right)$; c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}}\left(-12x^2+9x-5\right)$;

Scanned with OKEN Scanner

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-3x+7x^2\right)$; e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{5}x^2+1\right)$; f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{4}x^2-2x-10\right)$.

34. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-5}{2x+3}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{6-5x}{2+x}$; c) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{1-\sqrt{3}\cdot x}{2}$; d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-5x+8}{x+4}$;

e) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x(3-x)}{4x^2-x-3}$; f) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{9x-1}{18x^2-3x+4}$; g) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{3x}{(x+2)^2}$; h) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-5x}{(1-x)^2}$;

i) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{1}{1+x}$.

35. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to4}x\sqrt{x}$; b) $\lim\limits_{x\to8}\left(2+\sqrt[3]{x}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to2}\left(\sqrt{3}\right)^x$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{3}\right)^x$; e) $\lim\limits_{x\to8}\log_2 x$; f) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{10}}\lg x$.

36. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}5^x$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}4^x$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{6}\right)^x$;

e) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\log_3 x$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\log_{\frac{1}{5}} x$; g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_4 x$; h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{\frac{2}{3}} x$.

37. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\sin x-\cos x\right)$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\cos x+\operatorname{tg} x\right)$; c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(4\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{ctg} x+3\sin x\right)$; e) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(2\sin^2 x-3\cos^2 x+\operatorname{tg} x\right)$; f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

38. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to1}\arccos x$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\arcsin x\right)^2$; c) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left(\pi+\operatorname{arctg} x\right)$; d) $\lim\limits_{x\to1}\left(4\operatorname{arcctg} x-2\pi\right)$.

39. Să se calculeze limitele (cazul $\frac{\infty}{\infty}$):

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{3x+2}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-6x+1}{4x^2+x+2}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{x^2-6x+5}$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x-x^2}{4x+3}$;

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x-1}{1-2x}$; f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x}{4x^2+1}$; g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4^x-2}{5^x+2}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^x-2^x+1}{2^x+6}$.

40. Să se calculeze limitele (cazul $\frac{0}{0}$):

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3-2x^2}{3x^2+x}$; b) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-2x}{x^2-4}$; c) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5^x-1}{2x}$; e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3^x-1}{x^2+x}$; f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2^{x+1}-2}{x}$.

41. Să se calculeze limitele (cazul $0\cdot\infty$)

Scanned with OKEN Scanner

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x\cdot e^{\frac{1}{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+2)\cdot\frac{1}{e^x}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot(e^x+1)$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3+x^2}\cdot\ln(1+x^2)$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x-1}\cdot(x^2-x)$.

42. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2e^x}{x+e^x}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\ln x}{x+\ln x}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\cdot e^x$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{x+1}\right)\left(x-\frac{x}{x+1}\right)$; e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-5x^2+8x-4}$; f) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$;

g) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$; h) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x}-1}$; i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{4x}$;

j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin 5x}{2x}$; k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+\operatorname{tg} x}{x^2+x}$; l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 3x}{x^2+2x}$.

1.3. Asimptotele funcţiilor

43. Să se determine asimptotele orizontale, dacă există, ale funcţiilor:

a) $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$; b) $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-4x+4}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-5x}{-2x^2-1}$; d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+1}{e^x}$;

e) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$; e) $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_2(x+1)$.

44. Să se determine asimptotele oblice ale funcţiilor:

a) $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x^2-4x}{x+1}$; b) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1-5x^2}{x}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg} x, & x<0\\ \frac{x^2}{x+2}, & x\geq 0\end{cases}$; d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x-1$.

45. Să se determine asimptotele verticale ale funcţiilor:

a) $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{3x-4}{1-x}$; b) $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1+x}{x+2}$;

c) $f:(-2,2)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{4-x^2}$; d) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2\log_3 x+1$.

46. Să se determine asimptotele funcţiilor:

a) $f:\mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-3}{9-x^2}$; b) $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x^2-1}{x+1}$;

c) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$; d) $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2e^{-x}}{x-1}$;

e) $f:(e,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x+1}{\ln x-1}$.

47. Fie funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine asimptota orizontală spre $+\infty$ a funcției. *(Bacalaureat 2009)*

48. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x$.

Să se scrie ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ a graficului funcției f. *(Bacalaureat 2009)*

49. Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{2e^x}{x+e^x}$. *(Bacalaureat 2009)*

50. Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+3)e^x$.

51. Se dă funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-\ln x}{x+\ln x}$. Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{f'(x)}{(f(x)+1)^2}$. *(Bacalaureat 2009)*

52. Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. *(Bacalaureat 2009)*

53. Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=\ln x$ și $f_n(x)=f'_{n-1}(x)$.

Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f_2. *(Bacalaureat 2009)*

54. Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}$. *(Bacalaureat 2009)*

55. Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{e^x}$. *(Bacalaureat 2009)*

56. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2x^2+ax}{x+3}$, $a\in\mathbb{R}$.

Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât dreapta de ecuație $y=2x-5$ să fie asimptotă spre $+\infty$.

57. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{mx+2}{2x+5}$, $m\in\mathbb{R}$. Să se determine parametrul m astfel încât dreapta $y=-1$ să fie asimptotă a graficului funcției f.

58. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{a}{2}\right\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{2x-a}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât dreapta $x=3$ să fie asimptotă verticală a graficului funcției f.

2. FUNCȚII CONTINUE

Definiții

• Funcția $f:D\to\mathbb{R}$ se numește **continuă** în punctul $x_0\in D$ dacă x_0 este punct izolat al mulțimii D, sau $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, dacă x_0 este punct de acumulare pentru D.

• Punctul $x_0\in D$ se numește punct de discontinuitate al funcției $f:D\to\mathbb{R}$, dacă f nu este continuă în x_0.

Scanned with OKEN Scanner

Teoremă

Dacă funcţiile $f,g:D\to\mathbb{R}$ sunt funcţii continue în punctul $x_0\in D$,atunci:

a) funcţia $h=\alpha f+\beta g$ este continuă în $x_0,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

b) funcţia $f\cdot g$ este continuă în x_0 ;

c) funcţia $\frac{f}{g}$ este continuă în x_0 , dacă $g(x_0)\neq 0$;

d) dacă $(f(x))^{g(x)}$ are sens pentru oricare $x\in D$, atunci funcţia f^g este continuă în x_0 .

Teoremă (Cauchy – Bolzano)

Fie $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă pe intervalul I şi $a,b\in I, a<b$. Dacă valorile $f(a)$ şi $f(b)$ ale funcţiei f au semne contrare, $f(a)\cdot f(b)<0$, atunci există $c\in(a,b)$, astfel încât $f(c)=0$.

Teoremă (semnul funcţiei continue pe un interval)

Dacă funcţia $f:I\to\mathbb{R}$ este continuă pe intervalul I şi $f(x)\neq 0,\forall x\in I$, atunci f are acelaşi semn pe intervalul I .

1. Să se studieze continuitatea funcţiilor în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{3}{2}x-5,\ x_0\in\{4,-1\}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2-x}{x^2+1},\ x_0\in\{-1,0\}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x-3|-2x,\ x_0\in\{-2,1\}$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}-2^x,\ x_0\in\{-1,1\}$.

2. Să se studieze continuitatea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<1\\ 2x-1, & x\geq 1\end{cases}$ în punctul $x_0=1$.

(Bacalaureat 2009)

3. Să se studieze continuitatea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2-4x, & x\leq 1\\ -5x^2+2, & x>1\end{cases}$ în punctul $x_0=1$.

4. Să se studieze continuitatea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2+1}, & x\leq 0\\ -2x+1, & x>0\end{cases}$ în punctul $x_0=0$.

(Bacalaureat 2009)

5. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, & x\in(0,1)\\ 1+\ln x, & x\geq 1\end{cases}$. Să se studieze continuitatea funcţiei în punctul $x_0=1$. *(Bacalaureat 2009)*

6. Să se studieze continuitatea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x<0\\ \frac{1+\sqrt{x}}{x}, & x\geq 0\end{cases}$ în $x_0=0$.

7. Să se studieze continuitatea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{e}\cdot e^x-1, & x\leq 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$ în punctul $x_0=1$.

(Bacalaureat 2009)

Scanned with OKEN Scanner

8. Să se studieze continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}3+\log_2 x, & x\geq 2\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x<2\end{cases}$ în punctul $x_0=2$.

9. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-3}, & x\leq 1\\ 2\ln x-1, & x>1\end{cases}$ este continuă în punctul $x_0=1$.

10. Să se arate că punctul $x_0=0$ este punct de discontinuitate pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}x^2-3x+1, & x<0\\ 3\sqrt[3]{x}-1, & x\geq 0\end{cases}$.

11. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2+\sin x, & x\leq 0\\ \ln x, & x>0\end{cases}$. Să se arate că $x_0=0$ este un punct de discontinuitate de speța a doua.

12. Să se precizeze natura punctelor de discontinuitate pentru funcțiile:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+2}, & x<-2\\ e^x-\dfrac{1}{e^2}, & x\geq -2\end{cases}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^x-2}{x-1}, & x\neq 1\\ \ln 2, & x=1\end{cases}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}, & x>1\\ \dfrac{1}{2}, & x\leq 1\end{cases}$.

13. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}ax-6, & x<4\\ \sqrt{x}, & x\geq 4\end{cases}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în punctul $x_0=4$. *(Bacalaureat 2009)*

14. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}3^x+1, & x\leq 1\\ ax+2, & x>1\end{cases}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în punctul $x_0=1$.

15. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3}{x^2+1}, & x\leq 1\\ \dfrac{2x+a}{x^2+2}, & x>1,\ a\in\mathbb{R}\end{cases}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în punctul $x_0=1$.

16. Fie funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}, & x\in[-1,4]\\ \dfrac{x}{8}-a, & x\in(4,+\infty)\end{cases}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în punctul $x_0=4$.

17. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}5x+2a, & x>1\\ a^2x+2, & x\leq 1,\ a\in\mathbb{R}\end{cases}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât f

Scanned with OKEN Scanner

să fie continuă în $x_0 = 1$.

18. Fie funcţia $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2\sin x-\cos x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right)\\ \sqrt{3}\cdot \operatorname{tg} x+a, & a\in\left(\frac{\pi}{6},2\pi\right]\end{cases}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în $x_0=\frac{\pi}{6}$.

19. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2-2, & x\le 1\\ ax+b, & x>1,\ a,\ b\in\mathbb{R}\end{cases}$. Să se determine $a,\ b\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în $x_0=1$ şi să existe $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

20. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-4}{x+2}, & x\ge 0\\ 3x^2+bx+a, & x<0\end{cases}$. Să se determine a şi b astfel încât f să fie continuă în $x_0=0$ şi $f(-2)=4$.

21. Să se stabilească semnul funcţiilor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-2x^2$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(3^x-27)(1-2x)$;

c) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(x-4)\lg x$;

d) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(2^x-16)(\ln x-1)$;

e) $f:(0,+\infty)\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\lg x-1}{2^x-2}$.

22. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $(x-1)(x^2-x-12)\ge 0$;

b) $16x-x^3<0$;

c) $\dfrac{(2-x)(x^2-9)}{x(x-1)}\le 0$;

d) $(3^x-81)(\log_3 x-1)>0$;

e) $(\sqrt{x}-2)(x^2-1)\ge 0$.

3. FUNCŢII DERIVABILE

Fie $f:D\to\mathbb{R}, x_0\in D$ un punct de acumulare al mulţimii D.

- Funcţia f **are derivată** în punctul $x_0\in D$ dacă $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ există în $\overline{\mathbb{R}}$.
- Numărul $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\overline{\mathbb{R}}$ se numeşte **derivata funcţiei** f în punctul x_0.
- Funcţia f se numeşte **derivabilă** în $x_0\in D$ dacă $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ există şi este finită.
- Funcţia f este derivabilă pe mulţimea $A\subset D$ dacă este derivabilă în orice punct $x_0\in A$.

Observaţie

Dacă f este derivabilă pe mulţimea D, funcţia f' care asociază lui $x\in D$, numărul $f'(x)$ se numeşte **funcţia derivată** a funcţiei f sau **derivata funcţiei** f.

Scanned with OKEN Scanner

Avem relaţia $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Teoremă

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in D$. Dacă f este derivabilă în x_0, atunci f este continuă în x_0.

- Funcţia f admite tangentă la grafic în punctul $(x_0,f(x_0))$ dacă f are derivată în x_0.
- Panta tangentei la graficul funcţiei f în punctul $(x_0,f(x_0))$ este $m=f'(x_0)$.
- Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $(x_0,f(x_0))$ este $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.
- Punctul $(x_0,f(x_0))$ se numeşte **punct unghiular** dacă f nu are derivată în x_0, are derivate laterale în x_0 şi cel puţin o derivată laterală este finită.

Derivatele funcţiilor elementare

Funcţia	Derivata
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=c$	$f':\mathbb{R}\to\mathbb{R},f'(x)=0$
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=x^n,n\in\mathbb{N}^*$	$f':\mathbb{R}\to\mathbb{R},f'(x)=n\cdot x^{n-1}$
$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^r,r\in\mathbb{R}$	$f':(0,+\infty)\to\mathbb{R},f'(x)=r\cdot x^{r-1}$
$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R},f(x)=\sqrt{x}$	$f':(0,+\infty)\to\mathbb{R},f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=\sqrt[n]{x},n\geq 2,$ impar	$f':\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},f'(x)=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{x},n\geq 2,$ n par	$f':(0,+\infty)\to\mathbb{R},f'(x)=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},f(x)=\ln x$	$f':(0,+\infty)\to\mathbb{R},f'(x)=\dfrac{1}{x}$
$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},f(x)=\log_a x$	$f':(0,+\infty)\to\mathbb{R},f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$
$f:\mathbb{R}\to(0,+\infty),f(x)=e^x$	$f':\mathbb{R}\to(0,+\infty),f'(x)=e^x$
$f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=a^x,a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$	$f':\mathbb{R}\to(0,+\infty),f'(x)=a^x\ln a$
$f:\mathbb{R}\to[-1,1],f(x)=\sin x$	$f':\mathbb{R}\to[-1,1],f'(x)=\cos x$
$f:\mathbb{R}\to[-1,1],f(x)=\cos x$	$f':\mathbb{R}\to[-1,1],f'(x)=-\sin x$
$f:\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}x$	$f':\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}\to\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$

Scanned with OKEN Scanner

$f:\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{ctg}x$	$f':\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}\to\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$
$f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\arcsin x$	$f':(-1,1)\to\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\arccos x$	$f':(-1,1)\to\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f:\mathbb{R}\to\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(x)=\operatorname{arctg}x$	$f':\mathbb{R}\to\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$
$f:\mathbb{R}\to(0,\pi), f(x)=\operatorname{arcctg}x$	$f':\mathbb{R}\to(0,\pi), f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Reguli de derivare

Fie $f,g:D\to\mathbb{R}$, funcţii derivabile. Atunci:

a) $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x), x\in D, \boxed{(f+g)'=f'+g'}$;

b) $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x), x\in D, \boxed{(f-g)'=f'-g'}$;

c) $(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x), x\in D,$

$\boxed{(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'}$;

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}, x\in D$ şi

$g(x)\neq 0, \forall x\in D, \boxed{\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}}$.

Derivarea funcţiilor compuse.

$(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u', n\in\mathbb{N}^*$;

$(u^r)'=r\cdot u^{r-1}\cdot u', r\in\mathbb{R}$;

$(\sqrt{u})'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$;

$(\sqrt[n]{u})'=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}\cdot u'$;

$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$;

$(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$;

$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$;

$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$;

$(\operatorname{tg}u)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$;

$(\operatorname{ctg}u)'=\dfrac{-1}{\sin^2 u}\cdot u'$

$(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

$(\operatorname{arctg}u)'=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

$(u^v)'=\left(e^{v\ln u}\right)'=e^{v\ln u}\cdot\left(v'\ln u+v\cdot\dfrac{u'}{u}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

Teoremă (derivarea funcției inverse)

Fie $I, J \subset \mathbb{R}$ intervale și $f: I \to J$ o funcție continuă și bijectivă.

Dacă funcția f este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ și $f'(x_0) \neq 0$ atunci funcția inversă $f^{-1}: J \to I$ este derivabilă în $y_0 = f(x_0) \in J$ și $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

FUNCȚII DERIVABILE PE UN INTERVAL

Fie $f: D \to \mathbb{R}$.

- Un punct $x_0 \in D$ se numește **punct de maxim relativ (local)** al funcției f dacă există o vecinătate $V \in \mathscr{V}(x_0)$, astfel încât $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in V$.
- Un punct $x_0 \in D$ se numește **punct de minim relativ (local)** dacă există o vecinătate $V \in \mathscr{V}(x_0)$, astfel încât $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in V$.

Teoremă (P. Fermat)

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in (a,b)$ un punct de extrem al funcției. Dacă funcția f este derivabilă în x_0, atunci $f'(x_0) = 0$.

Teorema lui Rolle, consecințe

Teoremă

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}, a < b$. Dacă:

a) f este continuă pe $[a,b]$; b) f este derivabilă pe (a,b);

c) $f(a) = f(b)$; atunci există $c \in (a,b)$, astfel încât $f'(c) = 0$.

- Un punct $x_0 \in D$ se numește **punct de maxim relativ (local)** al funcției f dacă există o vecinătate $V \in \mathscr{V}(x_0)$, astfel încât $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in V$.
- Un punct $x_0 \in D$ se numește **punct de minim relativ (local)** dacă există o vecinătate $V \in \mathscr{V}(x_0)$, astfel încât $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in V$.

Teoremă (P. Fermat)

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in (a,b)$ un punct de extrem al funcției. Dacă funcția f este derivabilă în x_0, atunci $f'(x_0) = 0$.

Teorema lui Rolle, consecințe

Teoremă

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}, a < b$. Dacă:

a) f este continuă pe $[a,b]$; b) f este derivabilă pe (a,b);

c) $f(a) = f(b)$; atunci există $c \in (a,b)$, astfel încât $f'(c) = 0$.

Teoremă (consecința 1)

- Între două zerouri ale unei funcții derivabile pe un interval I se află cel puțin un zero al derivatei.

Teoremă (consecința 2)

- Între două zerouri consecutive ale derivatei unei funcții derivabile pe un interval I se află cel mult un zero al funcției.

Teorema lui Lagrange, consecințe:

Teoremă (J. L. Lagrange)

Scanned with OKEN Scanner

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}, a<b$. Dacă:

a) f este continuă pe $[a,b]$;

b) f este derivabilă pe (a,b), atunci există $c\in(a,b)$,

astfel încât $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Teoremă

Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, funcţii derivabile, astfel încât $f'(x)=g'(x), x\in[a,b]$. Atunci există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f-g=c$.

Teoremă (Regula lui L' Hospital: caz $\frac{0}{0}$)

Fie $f,g:I\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in I$ punct de acumulare al intervalului I. Dacă:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$; b) f şi g sunt derivabile pe $I\setminus\{x_0\}$;

c) $g'(x)\neq 0, \forall x\in I\setminus\{x_0\}$; d)Există $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\in\overline{\mathbb{R}}$;

atunci funcţia $\dfrac{f}{g}$ are limită în x_0 şi $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Teoremă (Regula lui L'Hospital: caz $\frac{\infty}{\infty}$).

Fie $f,g:I\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in I$ punct de acumulare al intervalului I. Dacă:

a) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))=\lim\limits_{x\to x_0}(g(x))=+\infty$; b) f şi g sunt derivabile pe $I\setminus\{x_0\}$;

c) $g'(x)\neq 0, \forall x\in I\setminus\{x_0\}$; d) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\in\overline{\mathbb{R}}$.

atunci funcţia $\dfrac{f}{g}$ are limită în x_0 şi $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

1. Să se determine derivatele funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$ (D = domeniul maxim de definiţie) definite prin:

a) $f(x)=5x-6$; b) $f(x)=4x^2-3x+2$; c) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x$; d) $f(x)=2^x$;

e) $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$; f) $f(x)=\sqrt{x}+x$; g) $f(x)=\log_3 x$; h) $f(x)=1+\sin x$;

i) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$; j) $f(x)=5^{-x}$.

2. Să se calculeze derivatele funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$ date prin:

a) $f(x)=x^2\cdot e^x$; b) $f(x)=(x+2)\ln x$; c) $f(x)=(x-1)\sin x$;

d) $f(x)=\sin x\cdot\cos x$; e) $f(x)=(x^2-3x)\cdot e^x$; f) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$;

g) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$; h) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+3}$; i) $f(x)=\dfrac{5x-1}{x^2+x+1}$.

Scanned with OKEN Scanner

3. Să se determine derivatele următoarelor funcţii $f:D\to\mathbb{R}$ date prin:

a) $f(x)=(x^2+x)^6$. b) $f(x)=\ln(3x)$; c) $f(x)=(x^3+2x)\ln x$;

d) $f(x)=(x^2-1)e^{x+3}$; e) $f(x)=x\cdot e^{1+3x}$; f) $f(x)=\sqrt{x^3}+x$;

g) $f(x)=\sqrt[3]{3x}$; h) $f(x)=\cos x-2\sin x$; i) $f(x)=\frac{1}{3}\cdot \operatorname{tg}^3 x$;

j) $f(x)=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x$; k) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$; l) $f(x)=\frac{x-1}{x+2}\cdot e^x$.

4. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\ln x$.

a) Să se arate că $f'(x)=x(2\ln x+1)$, $\forall x\in(0,+\infty)$. b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x\ln x}$.

c) Să se rezolve ecuaţia $f'(x)-2x=0$, $x\in(0,+\infty)$. *(Bacalaureat 2009)*

5. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-\frac{1}{e^x}$.

a) Să se calculeze $f(0)+f'(0)$. b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+f'(x)}{x}$. *(Bacalaureat 2009)*

6. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-\frac{1}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x\in(0,+\infty)$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(1,0)$.

c) Să se rezolve ecuaţia $f'(x)=2x+1$, $x\in(0,+\infty)$.

7. Fie funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(1,+\infty)$. b) Să se verifice că $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$.

c) Să se calculeze $f''(x)$, $x\in(1,+\infty)$. *(Bacalaureat 2009)*

8. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3^x-x\ln 3$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$. b) Să se arate că $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2\ln 3$.

c) Să se rezolve ecuaţia $f'(x)=0$.

9. Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$, în punctul specificat, ştiind că:

a) $f(x)=x^2-6x+2$, $x_0=1$; b) $f(x)=x^3-x^2$, $x_0=2$;

c) $f(x)=e^{x+1}$, $x_0=-1$; d) $f(x)=\sqrt{x}-1$, $x_0=4$.

10. Să se determine punctul de pe graficul funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$ în care tangenta la graficul funcţiei are panta m, în cazurile:

a) $f(x)=3x^2-4x+1$, $m=2$; b) $f(x)=\frac{x+1}{x+3}$, $x>-3$, $m=\frac{1}{2}$.

11. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x^3+ax, & x\le 0\\ x^2+3x, & x>0,\ a\in\mathbb{R}\end{cases}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se calculeze $f'(2)$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia să fie derivabilă în punctul $x_0 = 0$.

12. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} 1+\sqrt{x+1}, & x>0 \\ x^2+ax+2, & x\le 0 \end{cases}$.

a) Să se verifice dacă f este continuă în $x_0 = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ ştiind că f este derivabilă în punctul $x_0 = 0$.

c) Pentru $a = -2$ să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $x_0 = -1$.

13. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} e^x-1, & x<0 \\ x^2+x+a, & x\ge 0, a\in\mathbb{R} \end{cases}$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să fie continuă în $x_0 = 0$.

b) Să se arate că funcţia f este derivabilă în $x_0 = 0$, pentru $a = 0$.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul $A\left(-2, \frac{1}{e^2}-1\right)$.

14. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-2x^2+x-1$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve ecuaţia $f'(x)-f''(x)=2$.

c) Să se determine coordonatele punctului de pe graficul funcţiei în care tangenta la grafic are panta $m = 5$.

15. Fie funcţia $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Să se stabilească semnul funcţiei f' pe $\mathbb{R}^*$.

(Bacalaureat 2009)

16. Fie funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $x>0$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(1,-1)$.

c) Să se studieze semnul funcţiei f' pe $(0,+\infty)$.

17. Să se determine $f'(x)$ şi $f''(x)$ pentru funcţiile $f:D\to\mathbb{R}$, date prin:

a) $f(x)=3x^2-4x+1$, $x\in\mathbb{R}$;

b) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$;

c) $f(x)=\frac{x-1}{x+5}$, $x\in(0,+\infty)$;

d) $f(x)=4\sqrt{x}+2x$, $x>0$;

e) $f(x)=(x+2)\ln x$, $x>0$;

f) $f(x)=(x^2+x)\cdot e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

18. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(3x-1)e^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$ şi $f''(x)$, pentru $x\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se verifice egalitatea $f''(x)-f'(x)=3\cdot e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

19. Să se rezolve ecuaţia $f''(x)=0$ pentru funcţiile $f:D\to\mathbb{R}$, ştiind că:

a) $f(x)=x^3-3x^2+1$; b) $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$; c) $f(x)=x^2\ln x$; d) $f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$.

20. Să se determine funcţia $f;\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$ ştiind că $f(2)=5, f'(1)=3, f''(0)=4$.

21. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(ax^2+bx), a, b\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $a=1$ şi $b=-2$ să se calculeze $f'(x)$.

b) Să se determine $a, b\in\mathbb{R}$ ştiind că $f'(0)=-1$ şi $f''(0)=4$.

22. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+e^x$.

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(x)+f'(x)-f''(x)=e^x+1$.

23. Fiind dată funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x\cdot\sin x$ să se arate că:

a) $2f(\pi)+f'(\pi)-f''(\pi)=e^\pi$; b) $f''(x)=2(f'(x)-f(x)), x\in\mathbb{R}$.

24. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$.

a) Să se arate că $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}, \forall x\in(0,+\infty)$.

b) Să se calculeze $f''(1)+f''(2)+\ldots+f''(9)$.

25. Folosind regula lui l'Hospital să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+x}{x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{2x^3-3x^2+1}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}$; e) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2^x-2}{x^2-1}$; f) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$.

26. Folosind regula lui l'Hospital să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2x+2}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+x+1}{2x-1}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{x^4+x+1}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\ln x}{3x+5\ln x}$; e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x|x|}{3x^2+1}$; f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-3e^x}{4x+5}$.

4. STUDIUL FUNCŢIILOR CU AJUTORUL DERIVATELOR

Teoremă (caracterizarea funcţiilor monotone)

Fie $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe intervalul I. Atunci:

a) Funcţia f este **monoton crescătoare** pe intervalul I dacă şi numai dacă $f'(x)\geq0, \forall x\in I$.

b) Funcţia f este **monoton descrescătoare** pe intervalul I dacă şi numai dacă $f'(x)\leq0, \forall x\in I$.

Teoremă (caracterizarea convexităţii şi concavităţii)

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}, a<b$, o funcţie astfel încât:

a) f este continuă pe intervalul închis $[a,b]$;

b) f este derivabilă de două ori pe intervalul deschis (a,b).

Atunci:

Scanned with OKEN Scanner

1) Dacă $f''(x)\geq 0, \forall x\in[a,b]$ rezultă că f este convexă pe intervalul $[a,b]$ şi reciproc.

2) Dacă $f''(x)\leq 0, \forall x\in[a,b]$ rezultă că f este concavă pe intervalul $[a,b]$ şi reciproc.

1. Să se stabilească intervalele de monotonie şi punctele de extrem pentru funcţiile $f:D\to\mathbb{R}$, ştiind că:

a) $f(x)=x^3-6x^2,\ x\in\mathbb{R}$; b) $f(x)=x^3-3x+1,\ x\in\mathbb{R}$; c) $f(x)=x-2\sqrt{x},\ x>0$;

d) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+3},\ x\in(1,+\infty)$; e) $f(x)=x+\dfrac{2}{x},\ x\neq 0$; f) $f(x)=2\ln x-x,\ x>0$;

g) $f(x)=x\ln x,\ x>0$; h) $f(x)=x+\sin x,\ x\in[0,2\pi]$; i) $f(x)=e^x-x,\ x\in\mathbb{R}$;

j) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2},\ x\in\mathbb{R}^*$.

2. Să se stabilească intervalele de convexitate-concavitate şi punctele de inflexiune pentru funcţiile $f:D\to\mathbb{R}$ ştiind că:

a) $f(x)=x^3-3x^2,\ x\in\mathbb{R}$; b) $f(x)=x^4-6x^2,\ x\in\mathbb{R}$; c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$;

d) $f(x)=(x+1)e^x,\ x\in\mathbb{R}$; e) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3},\ x\in\mathbb{R}^*$; f) $f(x)=\ln^2 x,\ x>0$.

3. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-ax,\ a\in\mathbb{R}$. Să se determine a astfel încât $x_0=1$ să fie punct de extrem al funcţiei f.

4. Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ astfel încât să aibă valori extreme în punctele $x=1,\ x=-1$.

5. Fie funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+mx}{x+1},\ m\in\mathbb{R}$.

Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$.

6. Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-ax^2+b,\ a,b\in\mathbb{R}$ ştiind că $x=1$ este punct de inflexiune pentru funcţia f şi $f(1)=2$.

7. Se dă funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+a\sqrt{x},\ a\in\mathbb{R}$. Să se determine parametrul a astfel încât $x=1$ să fie punct de inflexiune al funcţiei f.

8. Fie funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. Să se demonstreze că $x^e\leq e^x,\ \forall x>0$.

9. Fie funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$. Să se arate că $2e^{\sqrt{3}}\leq 3e^{\sqrt{2}}$.

10. Fie funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$. Să se arate că $0<f(x)\leq\dfrac{1}{2e},\ \forall x\in\left[\sqrt{e},+\infty\right)$.

11. Fie funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{e^x}{x+2}$. Să se arate că $\dfrac{3}{e}\leq\dfrac{1}{f(x)}\leq 2,\ \forall x\in[0,\ 1]$.

12. Se dă funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(x^2-1)\ln x$. Să se demonstreze că $f(x)\geq 0,\ \forall x\in(0,+\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

13. Fie funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$. Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2}\right)>f\left(\sqrt[3]{3}\right)$.

14. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

a) Să se calculeze derivata funcției f.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Să se demonstreze că $f(x)\le -4$ pentru orice $x<-1$. *(Bacalaureat 2009)*

15. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-e^{-x}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

b) Să se arate că f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $S=g(0)+g(1)+\ldots+g(2011)$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=f'(x)-f''(x)$.

16. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Să se demonstreze că $3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$. *(Bacalaureat 2009)*

17. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+e^{-x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că f este descrescătoare pe $(-\infty,0]$ și crescătoare pe $[0,+\infty)$.

c) Să se determine ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ a graficului funcției f. *(Bacalaureat 2009)*

18. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^{2011}-2011(x-1)+1$.

a) Să se calculeze $f(0)+f'(0)$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul $A(1,2)$.

c) Să se arate că f este concavă pe $(-\infty,0]$ și convexă pe $[0,+\infty)$.

19. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. b) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}$, $\forall x\ge 0$.

c) Să se demonstreze că $\dfrac{1}{2}\le f(x)\le 2$, $\forall x\in[0,+\infty)$. *(Bacalaureat 2009)*

20. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+x^2$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. b) Să se demonstreze că f nu are asimptotă către $+\infty$.

c) Să se demonstreze că f este convexă pe $\mathbb{R}$. *(Bacalaureat 2009)*

21. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\setminus\{e\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. b) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{2}{x(1-\ln x)^2}$, $\forall x\in(0,+\infty)\setminus\{e\}$.

c) Să se determine asimptota orizontală spre $+\infty$ a graficului funcţiei f. *(Bacalaureat 2009)*

22. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x^2-x, & x\geq 1\\ -x^2+x+1, & x<1\end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcţiei f în punctul $x_0=1$.

b) Să se calculeze $2f'(-1)-3f(2)$.

c) Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate ale funcţiei f.

23. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-2\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x)+\dfrac{1}{2}f''(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Să se arate că f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,2)$.

c) Să se arate că $f(x)\geq 2-\ln 4$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

24. Se consideră funcţia $f:(-\infty,-1)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}\cdot e^x$, $\forall x\in(-\infty,-1)$.

b) Să se determine asimptotele funcţiei f.

c) Să se demonstreze că $f(x)<0$, $\forall x\in(-\infty,-1)$.

25. Se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_0(x)=e^{-x}-1$ şi $f_{n+1}(x)=f_n'(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{N}$.

a) Să se determine $f_1(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ a graficului funcţiei f_0.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_2(x)+x-1}{x^2}$. *(Bacalaureat 2009)*

26. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$, $x\neq 1$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se arate că $f(x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)\geq 0$, $\forall x>1$. *(Bacalaureat 2009)*

27. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(x-3)\cdot\sqrt{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{3x-3}{2\sqrt{x}}$, $x>0$.

b) Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(1,-2)$.

c) Să se demonstreze că $x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\geq 3$, $\forall x>0$. *(Bacalaureat 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

28. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x^2+2x+1)e^x$.

a) Să se verifice că $f'(x)=(x+1)(x+3)\cdot e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se demonstreze că $f(-2)+f(-4)\le\frac{8}{e^3}$. *(Bacalaureat 2009)*

29. Fie funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$.

a) Să se arate că $f'(4)+f'(1)=\frac{1}{4}$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul cu abscisa 1.

c) Să se arate că $2\sqrt{x}\ge 2+\ln x,\ \forall x\in(0,+\infty)$.

30. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$. a) Să se arate că $f'(x)=\frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}, x\in\mathbb{R}$.

b) Să se scrie ecuaţia asimptotei orizontale la graficul funcţiei f spre $-\infty$.

c) Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2010}\right)<f\left(\sqrt[3]{2011}\right)$.

31. Se dă funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+2-3\sqrt[3]{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, x>0$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul $A(1,0)$.

c) Să se arate că $\frac{x+2}{3}\ge\sqrt[3]{x},\ \forall x>0$. *(Bacalaureat 2009)*

32. Se dau funcţiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ şi $g(x)=\frac{x-1}{e^x}$.

a) Să se verifice că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=0$.

b) Să se determine coordonatele punctului de extrem al funcţiei f.

c) Să se demonstreze că $g(x)-f(x)\le 1+\frac{1}{e^2},\ \forall x\in\mathbb{R}$. *(Bacalaureat 2009)*

33. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}4x^2-1, & x\le 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcţiei f în $x_0=1$. b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x+1}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(e^x)+f\left(e^{x^2}\right)+\ldots+f\left(e^{x^{2011}}\right)}{x^{2011}}$.

34. Se consideră funcţiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)\cdot e^x,\ g(x)=x\cdot e^x$.

a) Să se arate că $f'(x)=g(x)$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei g.

c) Să se demonstreze că g este crescătoare pe intervalul $I\subset\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă funcţia f este convexă pe I. *(Bacalaureat 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII RECAPITULATIVE
CLASA A XII-A

Elemente de algebră

I. Grupuri

II. Inele şi corpuri

Elemente analiză matematică

I. Primitive

II. Integrala definită

III. Aplicaţii ale integralei definite

Scanned with OKEN Scanner

Elemente de algebră
I. GRUPURI

Noţiunea de grup

Fie $G \neq \emptyset$ şi o lege de compoziţie $"\circ": G \times G \to G$.

Perechea $(G,\circ)$ se numeşte **grup** dacă sunt verificate axiomele.

G1) **Axioma asociativităţii:** $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in G$.

G2) **Axioma elementului neutru:** $\exists x \in G$, a.î.
$\forall x \in G \Rightarrow x \circ e = e \circ x = x$.

G3) **Axioma elementelor simetrizabile:** $\forall x \in G, \exists x' \in G$, a.î.
$x \circ x' = x' \circ x = e$.

Dacă în plus este verificată şi:

G4) **Axioma comutativităţii:** $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in G$, atunci grupul $(G,\circ)$ este grup comutativ (abelian).

Morfisme şi izomorfisme de grupuri

Fie $(G_1,\circ),(G_2,*)$ două grupuri.

- Funcţia $f: G_1 \to G_2$ este **morfism** (omomorfism) de grupuri dacă $f(x \circ y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in G_1$.
- Funcţia $f: G_1 \to G_2$ este **izomorfism** de grupuri dacă:
  a) f este morfism de grupuri;
  b) f este funcţie bijectivă.
- Dacă $f: G_1 \to G_2$ este izomorfism de grupuri, atunci $f^{-1}: G_2 \to G_1$, este izomorfism de grupuri.
- Fie $(G_1,\cdot),(G_2,\cdot)$ grupuri, e_1, e_2 elementele lor neutre şi morfismul $f: G_1 \to G_2$. Atunci:
  a) $f(e_1) = e_2$;
  b) $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}, x \in G_1$;
  c) $f(x^n) = (f(x))^n, x \in G_1, n \in \mathbb{Z}$
- Dacă $G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3$ sunt morfisme de grupuri, atunci $g \circ f$ este morfism de grupuri.

1. Să se studieze proprietatea de comutativitate a legii de compoziţie "$\circ$" pe mulţimea M în cazurile:

a) $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = 3x + 3y - xy$;

b) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = (x-2)(y-2) + 5$;

c) $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$, $A(x) \circ A(y) = A(x) \cdot A(y)$.

2. Să se studieze proprietatea de asociativitate pentru legea de compoziţie "$\circ$" pe mulţimea M în cazurile: a) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$; b) $M = (-4, +\infty)$, $x \circ y = xy + 4(x+y) + 12$;

c) $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = \sqrt[3]{xy}$;

d) $M = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A \circ B = A + B + I_2$.

Scanned with OKEN Scanner

3. Să se verifice dacă următoarele legi de compoziţie admit element neutru pe mulţimea M şi să se determine mulţimea $U(M)$ a elementelor simetrizabile:

a) $M=\mathbb{R}$, $x\circ y=x+y+3xy$; b) $M=\mathbb{Z}$, $x\circ y=x+y-5$;

c) $M=\mathbb{R}$, $x\circ y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$; d) $M=(0,+\infty)\setminus\{1\}$, $x\circ y=x^{2\ln y}$;

e) $M=\mathbb{Z}$, $x\circ y=xy-4(x+y)+20$.

4. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x\circ y=2xy-6x-6y+21$.

a) Să se arate că legea este asociativă.

b) Să se arate că $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2011}$.

5. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=(x-2)(y-2)+2$.

a) Să se arate că legea "$\circ$" este asociativă.

b) Să se demonstreze că $x\circ 2=2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $(-2011)\circ(-2010)\circ\ldots\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ\ldots\circ 2011$.

6. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x\circ y=(x-4)(y-4)+4$.

a) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x\circ x\circ x=x$.

c) Să se determine două numere $a,\ b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$. *(Bacalaureat 2009)*

7. Pe $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y+2$ şi $x\circ y=xy+2x+2y+2$.

a) Să se demonstreze că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$, $\forall x,\ y\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine simetricul elementului $x=-3$ în raport cu legea "$\circ$".

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x^2*y^2=7\\ x^2\circ y^2=16\end{cases}$, $x,\ y\in\mathbb{R}$.

8. Pe $\mathbb{R}$ se consideră operaţia $x\circ y=\sqrt[3]{x^3+y^3-1}$.

a) Să se arate că legea de compoziţie este asociativă.

b) Să se determine elementul neutru.

c) Să se calculeze $(-3)\circ(-2)\circ(-1)\circ\ldots\circ 3$.

9. Se consideră mulţimea $M=\left\{A(a)=\begin{pmatrix}a&0&a\\0&0&0\\a&0&a\end{pmatrix},\ a\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Să se verifice că $A(a)\cdot A(b)=A(2ab)$, $\forall\, a,b\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că $A\left(\frac{1}{2}\right)$ este element neutru faţă de operaţia de înmulţire a matricelor pe M.

c) Să se determine simetricul elementului $A(1)\in M$ în raport cu înmulţirea matricelor pe M.

(Bacalaureat 2009)

10. Pe $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y-3$ şi $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$.

a) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $x\circ x=x*x$.

b) Să se determine $a\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x\circ a=3$, $\forall\, x\in\mathbb{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x*(y+1)=4 \\ (x-y)\circ 1=5 \end{cases}$, $x, y\in\mathbb{Z}$. *(Bacalaureat 2009)*

11. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

a) Să se verifice că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, $\forall x, y\in\mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $(x^2-5)\circ 6=-1$.

c) Să se determine două numere $a, b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$. *(Bacalaureat 2009)*

12. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie $x\circ y=x+y+3$ şi $x*y=xy-3(x+y)+12$.

a) Să se verifice că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, $\forall x, y\in\mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $(x\circ(x+1))+(x*(x+1))=11$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x\circ(y-1)=0 \\ (x+1)*y=x*(y+1) \end{cases}$, $x, y\in\mathbb{R}$. *(Bacalaureat 2009)*

13. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=-xy+2x+2y-2$.

a) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x*4=10$.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel ca $x*a=a*x=a$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

c) Ştiind că legea "$*$" este asociativă, să se calculeze $\frac{1}{2009}*\frac{2}{2009}*\ldots*\frac{4018}{2009}$.

(Bacalaureat 2009)

14. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-5(x+y)+30$.

a) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie.

b) Să se calculeze simetricul elementului $2\circ\frac{16}{3}$.

c) Să se verifice dacă legea de compoziţie este asociativă.

15. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=x+y+m$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea de compoziţie este asociativă.

b) Să se determine m astfel încât $e=-6$ să fie elementul neutru al legii "$*$".

c) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $\left(-\sqrt{3}\right)*\left(-\sqrt{2}\right)*m*\left(\sqrt{3}\right)=3\sqrt{2}$. *(Bacalaureat 2009)*

16. Pe $\mathbb{Z}$ se consideră legea de compoziţie $x*y=xy-x-y+2$.

a) Să se arate că $(\mathbb{Z}, *)$ este monoid comutativ.

b) Să se arate că dacă $x, y\in\mathbb{N}^*$ atunci $x*y\in\mathbb{N}^*$.

c) Să se determine $a\in\mathbb{Z}$ cu proprietatea că $x*a=a$, $\forall x\in\mathbb{Z}$.

17. Pe mulţimea $M=(0,1)\cup(1,\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x\perp y=x^{\ln\sqrt[3]{y}}$.

a) Să se arate că $(M, \perp)$ este monoid.

b) Să se determine simetricul elementului $x=e$, unde e este baza logaritmului natural.

18. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+x+y+k$.

a) Să se determine $k\in\mathbb{R}$ astfel încât legea să fie asociativă.

b) Pentru $k=0$ să se determine elementul neutru al legii.

c) Să se determine simetricul elementului $\left(-\frac{1}{2}\circ 4\right)$ când $k=0$.

Scanned with OKEN Scanner

19. Să se studieze asociativitatea şi comutativitatea următoarelor legi pe mulţimea M:

a) $M=\mathbb{Z}_3,\ x\circ y=x-\hat{2}y;$ b) $M=\mathbb{Z}_4,\ x\circ y=\hat{2}(x-y).$

20. Pe mulţimea $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$ se consideră legea $x\circ y=x^{3\ln y}$.

a) Să se determine mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $x\circ e=8$, unde e este baza algoritmului natural.

b) Să se demonstreze că $x\circ y\in G,\ \forall x, y\in G.$

c) Să se arate că "$\circ$" este asociativă pe mulţimea G. *(Bacalaureat 2009)*

21. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=3^{x+y}$.

a) Să se calculeze $2011\circ(-2011)$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $(2x)\circ x^2=27$.

c) Să se demonstreze că dacă $(x\circ y)\circ z=3^{z+1}$, atunci $x+y=0$.

22. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

a) Să se calculeze $x*0$.

b) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

c) Ştiind că $x_0\in\mathbb{Q}$ şi $x_n=x_0*x_{n-1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, să se arate că $x_3\notin\mathbb{Q}$. *(Bacalaureat 2009)*

23. Pe mulţimea $M=[k,+\infty)\subset\mathbb{R},\ k\in\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie

$x*y=xy-k(x+y)+k^2+k,\ \forall x, y\in\mathbb{R}.$

a) Să se determine $k\in\mathbb{R}$ astfel încât $2*3=2$.

b) Pentru $k=2$ să se rezolve în M ecuaţia $x*x=6$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $x, y\in M$ rezultă că $x*y\in M$. *(Bacalaureat 2009)*

24. Să se studieze dacă cuplul $(M,\circ)$ formează grup, ştiind că:

a) $M=\{\hat{0},\hat{2},\hat{4},\hat{6}\}\subset\mathbb{Z}_8,\ x\circ y=x+y;$ b) $M=\{\hat{0},\hat{2},\hat{4}\}\subset\mathbb{Z}_6,\ x\circ y=x+y-\hat{3}xy;$

c) $M=(-1,+\infty),\ x\circ y=x+y+xy;$ d) $M=(6,+\infty),\ x\circ y=xy-6x-6y+42;$

e) $M=\mathbb{R},\ x\circ y=2xy-x-y+1;$ f) $M=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\}\subset S_3,$

compunerea permutărilor.

25. Se dă mulţimea $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1&x-1\\0&x\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}^*\right\}$.

a) Să se verifice că $A(x)\cdot A(y)=A(xy),\ \forall x, y\in\mathbb{R}.$

b) Să se arate că $(M,\cdot)$ este grup comutativ.

26. Fie $G=\{x+y\sqrt{5}\mid x, y\in\mathbb{Q},\ x^2-5y^2=1\}$.

a) Să se arate că oricare ar fi $a, b\in G$, atunci $a\cdot b\in G$.

b) Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup comutativ, unde "$\cdot$" este înmulţirea de numere reale.

27. Fie $G=\{a+b\sqrt{2}\mid a, b\in\mathbb{Z},\ a^2-2b^2=1\}$.

a) Să se verifice că $3+2\sqrt{2}\in G$.

b) Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu înmulţirea de numere reale.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

28. Fie $\mathbb{Z}$ şi legea de compoziţie $x \circ y = x + y + a,\ a \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine a astfel încât elementul neutru al legii să fie $e = -2$.

b) Să se verifice dacă $(\mathbb{Z}, \circ)$ este grup comutativ .

29. Pe mulţimea $G = (-1, 1)$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$.

a) Să se arate că $(G, *)$ este grup comutativ.

b) Să se rezolve ecuaţia $x * (x+1) = \dfrac{5}{7}$.

30. Fie mulţimea $G = \left\{ A_x = \begin{pmatrix} 2011^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se demonstreze că $A_x \cdot A_y = A_{x+y},\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup comutativ, unde "$\cdot$" este înmulţirea matricelor.

31. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = xy - x - y + 2$.

a) Să se arate că $(\mathbb{R}, \circ)$ este grup comutativ.

b) Să se arate că $x \circ 1 = 1 \circ x = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\dfrac{\sqrt{1}}{2} \circ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \circ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \circ \ldots \circ \dfrac{\sqrt{2011}}{2}$.

32. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = (x-8)(y-8) + 8$.

a) Să se arate că $(\mathbb{R}, \circ)$ este grup.

b) Să se calculeze $1 \circ 2 \circ 3 \circ \ldots \circ 2011$.

c) Să se rezolve ecuaţia $x \circ x \circ x \circ x = 9$.

33. Fie mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Să se arate că $\forall\, A, B \in M$, atunci $A + B \in M$ şi $A \cdot B \in M$.

b) Să se arate că $(M, +)$ este grup comutativ.

34. Se consideră grupurile $(\mathbb{R}, +)$ şi $((0, +\infty), \cdot)$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty),\ f(x) = 2011^x$.

a) Să se arate că f este morfism de grupuri.

b) Să se studieze dacă f este izomorfism de grupuri.

35. Pe mulţimea $G = \mathbb{R} \setminus \{-15\}$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = xy + 15(x + y) + 210$.

a) Să se arate că $(G, \circ)$ este grup comutativ.

b) Să se arate că funcţia $f : G \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = x + 15$ este izomorfism între grupurile $(G, \circ)$ şi $(\mathbb{R}, \cdot)$.

36. Fie mulţimile $G = \left\{ a + b\sqrt{6} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 - 6b^2 = 1 \right\}$ şi

$M = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ 6y & x \end{pmatrix} \middle|\ x, y \in \mathbb{Q} \text{ şi } \det A = 1 \right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup. b) Să se arate că $(M,\cdot)$ este grup.

c) Să se verifice dacă funcţia $f:M\to G,\ f\left[\begin{pmatrix} x & y \\ 6y & x \end{pmatrix}\right]=x+y\sqrt{6}$ este izomorfism între grupurile $(M,\cdot)$ şi $(G,\cdot)$.

37. Pe $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie $x\circ y=x+y-3$ şi $x*y=x+y+7,\ \forall x,y\in\mathbb{Z}$.

a) Să se arate că funcţia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, f(x)=x-10$ este izomorfism între grupurile $(\mathbb{Z},\circ)$ şi $(\mathbb{Z},*)$.

b) Să se verifice dacă funcţia $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, g(x)=x+10$ este izomorfism între grupurile $(\mathbb{Z},*)$ şi $(\mathbb{Z},\circ)$.

38. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie $x\circ y=x+y+4$ şi $x*y=ax+y-2$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{Z}$ astfel încât legea "$*$" să fie asociativă.

b) Să se arate că $(\mathbb{Z},\circ)$ şi $(\mathbb{Z},*)$ sunt grupuri, pentru $a=1$.

c) Pentru $a=1$ să se arate că funcţia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, f(x)=x+6$ este morfism între grupurile $(\mathbb{Z},\circ)$, $(\mathbb{Z},*)$.

39. Pe mulţimile $G_1=(-1,+\infty)$ şi $G_2=(-\infty,1)$ se definesc operaţiile algebrice $x\circ y=x+y+xy$, respectiv $x*y=x+y-xy$.

a) Să se arate că $(G_1,\circ)$ şi $(G_2,*)$ sunt grupuri comutative.

b) Să se arate că funcţia $f:(-\infty,1)\to(-1,+\infty)$, $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ este un izomorfism între grupurile $(G_2,*)$ şi $(G_1,\circ)$.

40. Pe $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziţie $x\perp y=x+y+1$, $x\circ y=ax+by-1$, $a,b\in\mathbb{Z}$ şi funcţia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, f(x)=x+2$.

a) Să se demonstreze că $x\perp(-1)=(-1)\perp x=x,\ \forall x\in\mathbb{Z}$.

b) Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}$ pentru care legea de compoziţie "$\circ$" este asociativă.

c) Dacă $a=b=1$ să se arate că f este morfism între grupurile $(\mathbb{Z},\perp)$ şi $(\mathbb{Z},\circ)$. *(Bac 2009)*

41. Pe $G=(-1,1)$ se consideră legea de compoziţie $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$.

a) Să se calculeze $\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{2}$. b) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

c) Fie funcţia $f:(-1,1)\to(0,+\infty), f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$. Să se verifice că $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$ pentru oricare $x,y\in G$. *(Bacalaureat 2009)*

42. Pe $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziţie $x*y=px+y+2$ cu $p\in\mathbb{Z}$, $x\circ y=x+y-2$ şi funcţia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ f(x)=3x+q,\ q\in\mathbb{Z}$.

a) Să se determine p astfel ca legea "$*$" să fie comutativă.

b) Pentru $p=1$, să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $(x*x)\circ(x*x)=x^2+2$.

c) Pentru $p=1$, să se determine q astfel încât funcţia f să fie morfism între grupurile $(\mathbb{Z},*)$ şi

Scanned with OKEN Scanner

$(\mathbb{Z},\circ)$. *(Bacalaureat 2009)*

43. Fie $G=(4,+\infty)$ şi legea de compoziţie $x\circ y=xy-4(x+y)+20,\ \forall x,y\in G$.

a) Să se arate că $(G,\circ)$ este grup comutativ.

b) Dacă $f:(0,+\infty)\to(4,\infty), f(x)=mx+n$ este izomorfism între grupurile $(G,\circ)$ şi $((0,\infty),\cdot)$, să se determine $m,n\in\mathbb{R}$.

44. Fie $G=(0,+\infty)\setminus\{1\}$ şi legea de compoziţie $x\circ y=x^{\ln y}$.

a) Să se arate că $(G,\circ)$ este grup comutativ.

b) Să se arate că funcţia $f:G\to\mathbb{R}^*, f(x)=\ln x$ este izomorfism între grupurile $(G,\circ)$ şi $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

45. Pe $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie $x\circ y=x+y+9$ şi $x*y=x+y-5$.

a) Să se verifice dacă funcţia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, f(x)=x+14$ este izomorfism între grupurile $(\mathbb{Z},\circ)$ şi $(\mathbb{Z},*)$.

b) Să se verifice dacă funcţia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, f(x)=-x-4$ este izomorfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{Z},\circ)$ şi $(\mathbb{Z},*)$.

46. Se consideră mulţimea $G=\{A_x \mid x\in\mathbb{Z}\}$, unde $A_x=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x&0&1\end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $A_x\cdot A_y=A_{x+y},\ \forall x,y\in\mathbb{Z}$. b) Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup.

c) Să se arate că funcţia $f:\mathbb{Z}\to G, f(x)=A_x$ este morfism între grupurile $(\mathbb{Z},+)$ şi $(G,\cdot)$.

II. INELE ŞI CORPURI

2.1. Inele şi corpuri

Noţiunea de inel

Fie $A\neq\emptyset$ şi legile de compoziţie pe A notate "$\circ$" şi "$*$".

- Tripletul $(A,\circ,*)$ este **inel** dacă sunt verificate axiomele:

A1) **Axioma grupului**: $(A,\circ)$ este grup comutativ.

A2) **Axioma monoidului**: $(A,*)$ este monoid.

A3) **Axioma distributivităţii**:

$x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z),\forall x,y,z\in A$

$(x\circ y)*z=(x*z)\circ(y*z),\forall x,y,z\in A$

Inelul este comutativ (abelian) dacă legea a doua "$*$" este comutativă:

- Elementul neutru al grupului $(A,\circ)$ se numeşte **zeroul inelului**, notat O_A sau O. Elementul neutru al monoidului $(A,*)$ se numeşte elementul unitate al inelului, notat 1_A sau 1.

- Se notează cu $U(A)$ mulţimea elementelor simetrizabile ale inelului în raport cu a doua lege de compoziţie.

$(U(A),*)$ este grupul unităţilor inelului $(A,\circ,*)$.

Elementul $d\in A\setminus\{0\}$ se numeşte **divizor al lui zero** dacă există $d_1\in A\setminus\{0\}$ astfel încât

Scanned with OKEN Scanner

$d \cdot d_1 = 0$ sau $d_1 \cdot d = 0$.

Un inel comutativ şi fără divizori ai lui zero se numeşte **inel integru** sau **domeniu de integritate**.

- Fie $(A,+,\cdot)$ inel integru, $x,y,a \in A$ şi $a \neq 0$:
  - dacă $ax = ay \Rightarrow x = y$
  - dacă $xa = ya \Rightarrow x = y$

  } reguli de simplificare

Corpuri

Fie $K \neq \emptyset$, mulţime cu cel puţin două elemente şi două legi de compoziţie pe K, notate "$\circ$" şi "$*$".

- Tripletul $(K,\circ,*)$ este **corp** dacă sunt verificate axiomele:

  K1) $(K,\circ,*)$ este inel;

  K2) $\forall x \in K, x \neq 0_K, \exists x' \in K$, astfel încât $x * x' = x' * x = 1_K$.

- Corpul $(K,\circ,*)$ este **corp comutativ** dacă legea de compoziţie "$*$" este comutativă.
- Inelul $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ este corp $\Leftrightarrow$ n este număr prim.

Morfisme de inele şi corpuri

Fie $(A,\circ,*)$ şi $(B,\perp,\top)$ inele

- Funcţia $f: A \to B$ se numeşte **morfism de inele** dacă:

  a) $f(x \circ y) = f(x) \perp f(y), \forall x,y \in A$;

  b) $f(x * y) = f(x) \top f(y), \forall x,y \in A;$;

  c) $f(1_A) = 1_B$.

- Funcţia $f: A \to B$ este **izomorfism de inele** dacă:

  a) f este morfism de inele;

  b) f este funcţie bijectivă.

- Fie $(K_1,\circ,*)$ şi $(K_2,\perp,\top)$ corpuri. Funcţia $f: K_1 \to K_2$ este morfism (izomorfism) de corpuri dacă f este morfism (izomorfism) de inele de la K_1 la K_2.

1. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie $x \circ y = x + y - 4$ şi $x * y = -xy + 4x + 4y - 12$. Să se arate că $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

2. Pe $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie $x \circ y = x + y + 3$ şi $x * y = xy + 3(x + y) + 6$. Să se arate că legea "$*$" este distributivă faţă de "$\circ$".

3. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie $x \circ y = x + y + a$ şi $x * y = xy - 3x - 3y + b$. Să se determine numerele $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât legea "$*$" să fie distributivă faţă de "$\circ$".

4. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie $x \perp y = x + y - 7$ şi $x * y = xy - 7x - 7y + 56$

a) Să se arate că $(\mathbb{Z}, \perp, *)$ este inel comutativ.

b) Să se determine mulţimea $U(\mathbb{Z})$ a elementelor inversabile ale inelului.

5. Pe mulţimea $A = (0,+\infty)$ se definesc legile de compoziţie $x \circ y = xy$ şi $x * y = x^{\ln \sqrt{y}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se arate că $(A,\circ,*)$ este inel comutativ.

6. Să se arate că mulțimea $A=\{x-y\sqrt{5}\mid x,y\in\mathbb{Q}\}$ împreună cu operațiile de adunare și înmulțire de numere reale formează o structură de inel comutativ.

7. Fie $A=\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ b & a\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$ și operațiile de adunare și înmulțire a matricelor de ordinul 2.

Să se arate că $(A,+,\cdot)$ este inel cu divizori ai lui zero.

8. Pe mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix}x & -y\\ -3y & x\end{pmatrix}\middle|\ x,y\in\mathbb{R}\right\}$ se consideră operațiile de adunare și înmulțire a matricelor de ordinul 2.

a) Să se arate că dacă $A,B\in M$, atunci $A+B\in M$ și $A\cdot B\in M$.

b) Să se arate că $(M,+,\cdot)$ este inel.

9. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziție $x\circ y=x+y+1$ și $x*y=xy+x+y$.

a) Să se studieze dacă $(\mathbb{Z},\circ,*)$ este inel comutativ fără divizori ai lui zero.

b) Să se determine suma elementelor inversabile ale inelului.

c) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $x\circ(4x-1)=x*x$.

10. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziție $x\circ y=x+y-6$ și $x*y=xy-6x-6y+k$.

a) Să se determine $k\in\mathbb{R}$ astfel încât legea de compoziție "$*$" să fie distributivă față de "$\circ$".

b) Să se arate că $(\mathbb{Z},\circ,*)$ este domeniu de integritate, luând $k=42$.

c) Pentru $k=42$ să se determine mulțimea $U(\mathbb{Z})$.

d) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $(3x-1)*(x+2)=18$.

11. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziție $x*y=x+y-3$ și $x\circ y=xy-3(x+y)+12$.

a) Să se arate că $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)$, $\forall x,y\in\mathbb{Z}$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $x\circ x=12$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases}(x-3)*y=2\\ (x-y)\circ 4=10\end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$. *(Bacalaureat 2009)*

12. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_5$ se definesc legile de compoziție $x\circ y=\hat{2}x+\hat{2}y$ și $x*y=\hat{3}xy$.

a) Să se arate că $x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{Z}_5$.

b) Să se studieze dacă $(\mathbb{Z}_5,\circ,*)$ este inel comutativ.

c) Să se rezolve ecuația $x*\hat{4}=\hat{3}$. d) Să se rezolve ecuația $\hat{2}x\circ\hat{3}=x*\hat{2}$.

13. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ se definesc legile de compoziție $x\circ y=x+y+\hat{3}$ și $x*y=xy+\hat{3}x+\hat{3}y$.

a) Să se verifice dacă $x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{Z}_6$.

b) Să se arate că $(\mathbb{Z}_6,\circ,*)$ este inel cu divizori ai lui zero.

c) Să se rezolve ecuația $x*\hat{2}x=\hat{2}$. d) Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases}x*\hat{2}=\hat{2}y+\hat{3}\\ x\circ y=\hat{5}\end{cases}$.

Scanned with OKEN Scanner

14. Pe mulţimea $\mathbb{Z}_2$ se definesc legile de compoziţie $x \perp y = x + y - \hat{1}$, $x \top y = xy + x + y$.

a) Să se arate că $(\mathbb{Z}_2, \perp, \top)$ este inel comutativ.

b) Să se rezolve ecuaţia $(x - \hat{1}) \top (x + \hat{1}) = \hat{1}$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x \perp y = \hat{0} \\ y \top (x + \hat{1}) = \hat{1}. \end{cases}$

15. Pe mulţimea $\mathbb{Q}$ se definesc legile de compoziţie $x \perp y = x + y - 10$ şi $x \top y = xy - 10(x + y) + 110$.

a) Să se verifice că $(\mathbb{Q} \perp, \top)$ este corp comutativ.

b) Să se rezolve ecuaţia $(x + 5) \top x = 10$.

16. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie $x \circ y = x + y - \frac{3}{2}$ şi $x * y = 2xy - 3x - 3y + 6$.

a) Să se verifice dacă $(\mathbb{R}, \circ, *)$ este corp comutativ.

b) Să se rezolve ecuaţia $(x + 2) * (x - 3) = 7$.

17. Pe mulţimea $\mathbb{Q}$ se definesc legile de compoziţie $x \perp y = x + y - 1$ şi $x * y = \frac{1}{3}xy - x - y + 4$.

a) Să se verifice dacă $(\mathbb{Q}, \circ, *)$ este corp comutativ.

b) Să se rezolve sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} x \perp (y - 1) = 5 \\ x * 3 = y - 2 \end{cases}$.

18. Fie mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; x \in \mathbb{R} \right\}$. Să se arate că M împreună cu adunarea şi înmulţirea matricelor formează structură de corp.

19. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ unde $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$.

a) Să se rezolve ecuaţia $\hat{2}x + \hat{5} = \hat{1}$, pentru $x \in \mathbb{Z}_6$.

b) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_6$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} \hat{2}x + y = \hat{4} \\ x + \hat{2}y = \hat{5} \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}_6$. *(Bacalaureat 2009)*

20. Se consideră $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ inelul claselor de resturi modulo 8.

a) Să se calculeze în $\mathbb{Z}_8$ suma $S = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \ldots + \hat{7}$.

b) Să se calculeze în $\mathbb{Z}_8$ produsul elementelor inversabile ale inelului.

c) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_8$ sistemul $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{5}y = \hat{2} \\ \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{5} \end{cases}$. *(Bacalaureat 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

21. Să se rezolve ecuaţiile în inelele de corpuri specificate:

a) $x^2+x=\hat{2}$ în $\mathbb{Z}_4$; b) $\hat{3}x+\hat{2}=\hat{1}$ în $\mathbb{Z}_4$; c) $\hat{2}x^2+x=\hat{3}$ în $\mathbb{Z}_5$;

d) $x^2+\hat{4}x=\hat{3}$ în $\mathbb{Z}_6$; e) $x\left(x+\hat{1}\right)=\hat{2}$ $\mathbb{Z}_3$; f) $x^2-\hat{3}x+\hat{2}=\hat{0}$ în $\mathbb{Z}_7$.

22. Să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ sistemele de ecuaţii: a) $\begin{cases} x+y=\hat{4} \\ \hat{2}x+\hat{3}y=\hat{1} \end{cases}$; b) $\begin{cases} \hat{3}x+y=\hat{4} \\ x+\hat{4}\cdot y=\hat{0} \end{cases}$.

23. Să se rezolve în corpul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ sistemul de ecuaţii: a) $\begin{cases} x+\hat{2}y=\hat{5} \\ \hat{2}x+\hat{3}y=\hat{2} \end{cases}$; b) $\begin{cases} \hat{4}x+y=\hat{3} \\ x+\hat{2}y=\hat{6} \end{cases}$.

24. Se dă mulţimea $A=\left\{\begin{pmatrix} x & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & x & \hat{0} \\ b & c & x \end{pmatrix} \middle|\ x,b\,c\in\mathbb{Z}_2\right\}$.

a) Să se determine numărul de elemente ale mulţimii A.

b) Să se arate că pentru orice $X\in A$, $X^2=I_3$ sau $X^2=O_3$.

25. Se consideră inelul $(A,+,\cdot)$ unde $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle|\ a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

a) Să se determine numărul elementelor mulţimii A.

b) Să se rezolve în mulţimea A ecuaţia $X^2=I_2$.

2.2. Inelul polinoamelor cu coeficienţi într-un corp comutativ

Forma algebrică a polinoamelor

Fie $(K,+,\cdot)$ un corp comutativ.

• **Forma algebrică a unui polinom de gradul n în nedeterminata X, cu coeficienţi in corpul K este:**

$f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0, a_i\in K$, pentru $i=\overline{0,n}$ şi $a_n\in K^*$.

Elementele $a_i\in K, i=\overline{0,n}$ sunt **coeficienţii** polinomului. Monomul a_nX^n este **monomul dominant**, iar termenul a_0 **este termenul liber.**

• Cel mai mare număr natural n cu proprietatea $a_n\neq 0_K$ se numeşte **gradul polinomului** f.

• Polinomul cu toţi coeficienţii $a_i=0, i=\overline{0,n}$ este polinom nul $(f=0)$. Se consideră $\text{grad}(0)=-\infty$.

• Polinoamele $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_0$ şi $g=b_mX_m+b_{m-1}X^{m-1}+...+b_0$ sunt egale, $f=g$, dacă au acelaşi grad, $m=n$, şi $a_0=b_0, a_1=b_1,...a_n=b_m$.

• **Valoarea polinomului** f în punctul $c\in K$ este elementul $f(c)=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+....a_1c+a_0$.

• Funcţia $f:K\to K, f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$ se numeşte **funcţia polinomială** ataşată polinomului f.

• $K[X]$ = **mulţimea polinoamelor** cu coeficienţii în corpul K.

Împărţirea cu rest a polinoamelor.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema împărţirii cu rest.

Fie $f,g\in K[X],g\neq 0$. Atunci există şi sunt unice polinoamele $q,r\in K[X]$ astfel încât $f=g\cdot q+r$ şi grad $r<$ grad g

q este **câtul** împărţirii lui f la g, r este **restul** împărţirii, f este **deîmpărţitul**, g este **împărţitorul**.

Împărţirea la $X-a$. Schema lui Horner.

- **Teorema restului**: Restul împărţirii polinomului $f\in K[X]$ la polinomul $X-a$ este $r=f(a)$.

Divizibilitatea polinoamelor

Fie $(K,+,\cdot)$ un corp şi $f,g\in K[X]$.

- Polinomul g **divide** polinomul f (sau f **se divide** cu g) dacă există $h\in K[X]$, astfel încât $f=g\cdot h$. Se scrie g/f sau $f\vdots g$.

  Polinomul g se numeşte **divizor** al lui f, iar f este **multiplu** al lui g.

Rădăcini ale polinoamelor

Fie $f\in K[X],\text{grad}(f)=n,n\in\mathbb{N}^*$.

- Elementul $\alpha\in K$ este **rădăcină** a polinomului f dacă $f(\alpha)=0$.
- **Teorema lui Bezout**: Fie $f,g\in K[X],\alpha\in K$:

  a) α este rădăcină a lui $f\Leftrightarrow f\vdots(X-a)$;

  b) dacă $f\vdots g,g\neq 0$ şi α este rădăcină a lui g, atunci α este rădăcină a lui f.
- $\alpha\in K$ este **rădăcină multiplă** de ordinul $m\in\mathbb{N}^*$, dacă $f\vdots(X-a)^m$ şi $f\nmid(X-a)^{m+1}$.

  Dacă $m=1,\alpha$ este rădăcină **simplă.**

  Dacă $m=2,3,...,$ atunci α este rădăcină **dublă,triplă** etc.
- Ecuaţia de forma $f(x)=0$, unde $f\in K[X],grad(f)=n$, se numeşte **ecuaţie algebrică de gradul** n.
- $\alpha\in K$ este **soluţie** a ecuaţiei $f(x)=0$ dacă $f(\alpha)=0$.

Polinoame ireductibile. Descompunerea în produs de factori ireductibili

- Polinomul $f\in K[X]$ este **reductibil** peste corpul K dacă există $g,h\in K[X]$ de grad cel puţin unu, astfel încât $f=g\cdot h$.
- Polinomul $f\in K[X],\text{grad}(f)\geq 1$ este **ireductibil** peste corpul K dacă nu este reductibil.
- Orice polinom $f\in K[X]$ de gradul unu este ireductibil peste K.
- Dacă polinomul $f\in K[X],\text{grad}f\geq 2$, este ireductibil peste K, el nu are rădăcini în K.
- Dacă $f\in K[X],\text{grad}f\in\{2,3\}$ şi f nu are rădăcini în K, atunci el este ireductibil peste K.
- $f\in\mathbb{R}[X]$, nenul, este ireductibil peste $\mathbb{R}\Leftrightarrow\text{grad}(f)=1$ sau $\text{grad}(f)=2$ şi nu are rădăcini reale.

Fie $f\in\mathbb{R}[X],f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_0,a_n\neq 0.$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ sunt rădăcinile lui f atunci

$f=a_n(X-\alpha_1)....(X-\alpha_n)$.

Relaţiile lui Viete

a) Fie $f\in\mathbb{R}[X], f=aX^2+bX+c$, cu rădăcinile $x_1,x_2\in\mathbb{R}$. Atunci $x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

b) Fie $f\in\mathbb{C}[X], f=aX^3+bX^2+cX+d$, cu rădăcinile

$x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$. Atunci: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a} \end{cases}$.

Rezolvarea ecuaţiilor algebrice cu coeficienţi în $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$

Teorema 1: Fie $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$ ecuaţie algebrică, $a_n\neq 0$, cu coeficienţi în $\mathbb{Z}$.

a) Dacă $\alpha\in\mathbb{Z}$ este soluţie a ecuaţiei, atunci α divide a_0.

b) Dacă $\alpha=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q},(p,q)=1$, este soluţie a ecuaţiei, atunci p divide a_0 şi q divide a_n.

Teorema 2: Fie $f\in\mathbb{Q}[X], grad(f)=n, n\in\mathbb{N}^*$, $a,b\in\mathbb{Q}, b>0$ şi $u=a+\sqrt{b}\notin\mathbb{Q}$ rădăcină a lui f. Atunci:

a) $\bar{u}=a-\sqrt{b}$ este rădăcină a lui f;

b) u şi $\bar{u}$ au aceeaşi multiplicitate.

Ecuaţii algebrice de grad superior cu coeficienţi în $\mathbb{R}$

Ecuaţii bipătrate: $ax^4+bx^2+c=0, a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$.

Pentru rezolvare:

a) se notează $t=x^2$ şi se obţine o ecuaţie de gradul doi $at^2+bt+c=0$ (ecuaţie rezolventă);

b) se rezolvă ecuaţia rezolventă în $\mathbb{R}$;

c) se rezolvă ecuaţiile $x^2=t_1$ sau $x^2=t_2$ unde t_1,t_2 sunt soluţiile ecuaţiei rezolvente.

Ecuaţii reciproce.

Ecuaţia reciprocă de gradul trei: $ax^3+bx^2+bx+a=0$. Are soluţia $x_1=-1$ şi încă două soluţii obţinute din ecuaţia reciprocă de gradul doi: $ax^2+(b-a)x+a=0$.

Ecuaţia reciprocă de gradul patru: $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$.

Pentru rezolvare se parcurg etapele:

a) se împarte ecuaţia cu $x^2\neq 0$ şi se obţine $ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$;

b) se grupează termenii cu aceeaşi coeficienţi: $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$.

c) se notează $x+\frac{1}{x}=y$ şi rezultă că $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$.

Scanned with OKEN Scanner

d) după înlocuire se obține ecuația rezolventă de gradul doi:
$a\left(y^2-2\right)+by+c=0$ cu soluțiile $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$;

e) se rezolvă ecuațiile $x+\frac{1}{x}=y_1, x+\frac{1}{x}=y_2$.

1. Să se scrie sub formă algebrică polinoamele:

a) $f=(X-1)^2+(3X-1)^2 \in \mathbb{R}[X]$; b) $f=(X+2)^2\left(X^2-2X\right)+3 \in \mathbb{R}[X]$;

c) $f=\left(X+\hat{3}\right)^2+\left(\hat{3}X+\hat{1}\right)^2 \in \mathbb{Z}_5[X]$; d) $f=\left(\hat{4}X+\hat{1}\right)^3+\left(X-\hat{3}\right)\left(\hat{2}X+\hat{5}\right) \in \mathbb{Z}_6[X]$.

2. Să se determine în funcție de $m \in \mathbb{R}$ gradul polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$ în cazurile:

a) $f=(m-2)X^3+\left(m^2-4\right)X^2-2X+1$; b) $f=\left(m^2+m-2\right)X^4+2X^3-(m-1)X^2-3$.

3. Să se calculeze valoarea $f(\alpha)$ a polinomului f în cazurile:

a) $f=2X^3-4X^2+X-3 \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha=2$; b) $f=X^4+\hat{4}X^2+\hat{3}X+\hat{5} \in \mathbb{Z}_7$, $\alpha=\hat{3}$;

c) $f=16X^3+12X^2-4X+6 \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha=-\frac{1}{2}$.

4. Se consideră polinoamele $f=(4a+b)X^3+(a-b)X^2+(c-3) \in \mathbb{R}[X]$ și $g=(2a-b)X^3-2X^2+(a-c) \in \mathbb{R}[X]$. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f=g$.

5. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f=\left(m^2-m\right)X^2-4X+p+2$, $g=2X^2+qX-5$. Să se determine $m, p, q \in \mathbb{R}$ astfel încât $f=g$.

6. Se consideră polinoamele cu coeficienți reali $f=X^4+aX^3-28X^2+bX+96$ și $h=\left(X^2+2X-24\right)\left(X^2-4\right)$.

a) Să se scrie forma algebrică a polinomului h.

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât polinoamele f și h să fie egale. *(Bacalaureat 2009)*

7. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f=\left(\hat{3}a+\hat{3}b\right)X^2+\hat{2}X+\hat{2}a+\hat{3}b$ și $g=\hat{2}X^2+\hat{2}X+\hat{3}a+\hat{2}b$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_5$ astfel încât $f=g$.

b) Pentru $a=b=\hat{2}$ să se calculeze în $\mathbb{Z}_5$ suma $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})+f(\hat{3})+f(\hat{4})$. *(Bac2009)*

8. Să se determine polinomul $f \in \mathbb{R}[X], f=aX+b$ știind că:

a) $f(-1)=8, f(2)=-1$; b) $f\left(\frac{1}{2}\right)=-3, f(1)=-1$.

9. Să se determine polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, grad $f=2$ știind că:

a) $f(1)=0, f(0)=1, f(2)=5$; b) $f(0)=-2, f\left(\frac{1}{2}\right)=0, f(1)=1$.

10. Să se determine polinomul $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f=\hat{2}X^2+ax+b$, știind că $f(\hat{0})=f(\hat{1})=\hat{4}$.

11. Să se determine polinomul $f \in \mathbb{Z}_7[X], f=X^3+aX^2+b$ știind că $f(\hat{0})=5$ și $f(\hat{1})=\hat{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

12. Să se calculeze $f+g, f-g, 2f-3g$ știind că:

a) $f=5-4X-3X^2;\ g=5X-3$ în $\mathbb{R}[X]$;

b) $f=-3X^4+X^3-X^2+2,\ g=2X^3-3X^2+X-1,\ \mathbb{Q}[X]$;

c) $f=\sqrt{2}X^3-\left(\sqrt{2}+1\right)X^2+2,\ g=-\sqrt{2}X^3+\left(\sqrt{2}-1\right)X^2-5,$ în $\mathbb{R}[X]$.

13. Să se calculeze $f+g, f-g, \hat{2}f-g$ în inelul $\mathbb{Z}_p[X]$ știind că:

a) $f=X^2+X+1,\ g=X^3-X^2+X-\hat{1},\ p=2$;

b) $f=\hat{4}X^3+\hat{2}X^2+X-\hat{1},\ g=\hat{3}X^2-\hat{4}X+\hat{2},\ p=5$;

c) $f=\left(\hat{2}X+\hat{3}\right)X+\hat{2};\ g=\left(X+\hat{2}\right)^2-X^3+\hat{3}X^2,\ p=4$.

14. Să se calculeze $f\cdot g$ și f^2-g^2 în inelul $\mathbb{R}[X]$, știind că:

a) $f=5X-2,\ g=X+3$;

b) $f=X^2-2X+1,\ g=2X-1$;

c) $f=X^2-\frac{1}{2}X,\ g=X^3-2X$;

d) $f=\sqrt{2}-X,\ g=\sqrt{3}-\sqrt{2}X+X^2$.

15. Să se calculeze $f\cdot g, f^2, g^2$ în inelul $\mathbb{Z}_p[X]$, știind că:

a) $f=\hat{2}X-\hat{1},\ g=X+\hat{3},\ p=4$;

b) $f=X^2+\hat{2}X,\ g=\hat{1}-X,\ p=3$;

c) $f=X^2+\hat{3}X-\hat{2},\ g=\hat{2}X,\ p=5$;

d) $f=\left(\hat{3}X-\hat{1}\right)^2+X^3,\ g=\hat{4}X+\hat{3},\ p=7$.

16. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la g în cazurile:

a) $f=2X^3-4X^2+5X-3,\ g=X-3, f,g\in\mathbb{R}[X]$;

b) $f=X^4-4X^3+2X^2-5X-1,\ g=X^2-6X+2,\ f,g\in\mathbb{Q}[X]$;

c) $f=2X^4-5X^3-5X^2+5X+3,\ g=X^2-4X+3,\ f,g\in\mathbb{Z}[X]$.

17. Să se efectueze în $\mathbb{Z}_n[X]$ împărțirea polinomului f la g în cazurile:

a) $f=X^3+\hat{2}X^2+X+\hat{2},\ g=X+\hat{1},\ n=3$;

b) $f=\hat{2}X^3+X^2-\hat{3}X+\hat{4},\ g=X+\hat{3},\ n=5$;

c) $f=X^4+\hat{5}X^3+\hat{5}X^2+\hat{2}X+\hat{1},\ g=X^2+X+\hat{5},\ n=7$;

d) $f=X^3+\hat{2}X^2+X+\hat{2},\ g=\hat{3}X+\hat{1},\ n=5$.

18. Să se deteremine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului $f=X^4-2X^3-X+a$ la polinomul $g=X-2$ să fie egal cu zero.

19. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului $f=2X^3-4X^2+(3m+1)X+m^2$ la polinomul $g=X-1$ să fie egal cu -1.

20. Fie polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_5[X], f=\hat{3}X^2+aX+\hat{2}$ și $g=X+\hat{3}$. Să se determine $a\in\mathbb{Z}_5$ astfel încât restul împărțirii polinomului f la g să fie $\hat{2}$.

21. Fie $f\in\mathbb{Z}_7[X], f=\hat{2}X^4+\hat{3}X^3+X^2+aX+b$. Să se determine a și b știind că resturile împărțirii polinomului f la $X+\hat{4}$ și la $X+\hat{2}$ sunt respectiv $\hat{1}$ și $\hat{2}$.

22. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X], f=3X^4-2X^3-aX^2+2X+b$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$

Scanned with OKEN Scanner

știind că $f(2)=25$ și restul împărțirii lui f la $X-1$ este 4.

23. Fie $f\in\mathbb{R}[X], f=4X^3-6X^2-aX+b$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii lui f la $g=X^2-X+2$ să fie egal cu $-15X+3$.

24. Fie $f\in\mathbb{R}[X], f=X^5-3X^4+X^3+aX^2+bX+2$. Să se determine a și b astfel încât restul împărțirii polinomului f la $g=X^2-3X+2$ să fie polinomul nul.

25. Se consideră polinomul $f=X^2-12X+35$ și $g=(X-6)^{2011}+X-6$. Polinomul g are forma algebrică $g=a_{2011}X^{2011}+a_{2010}X+2010+\ldots+a_1X+a_0$, $g\in\mathbb{R}[X]$.

a) Să se calculeze $f(5)+g(5)$.

b) Să se arate că $a_0+a_1+\ldots+a_{2011}<0$.

c) Să se determine restul împărțirii polinomului g la polinomul f.

26. Să se efectueze împărțirile polinoamelor f și g folosind schema lui Horner:

a) $f=X^3-6X^2+7X+2,\ g=X-2,\ f,g\in\mathbb{R}[X]$;

b) $f=3X^4-5X^3+4X^2-6X-2,\ g=X+1,\ f,g\in\mathbb{R}[X]$;

c) $f=\hat{2}X^3+\hat{2}X^2+\hat{3}X+\hat{4},\ g=X+\hat{4},\ f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$;

d) $f=\hat{4}X^4+\hat{2}X^3+X^2+\hat{5}X+\hat{1},\ g=X+\hat{2},\ f,g\in\mathbb{Z}_7[X]$;

e) $f=\frac{1}{2}X^5+\frac{1}{4}X^4-2X^3+4X-5,\ g=X-4,\ f,g\in\mathbb{Q}[X]$.

27. Să se arate că polinomul f se divide cu polinomul g în cazurile:

a) $f,g\in\mathbb{R}[X], f=X^4-3X^3-X+3, g=X-3$;

b) $f,g\in\mathbb{Z}[X], f=3X^5+4X^4-X^3+4X^2-7X-6, g=X+2$;

c) $f,g\in\mathbb{Q}[X], f=2X^4+3X^3+X^2-4X-2, g=X^2+2X+2$;

d) $f,g\in\mathbb{Z}_5[X], f=\hat{2}X^3+\hat{3}X^2+\hat{4}X+\hat{2}, g=X+\hat{2}$;

e) $f,g\in\mathbb{R}[X], f=X^{2011}+1, g=X+1$.

28. Fie $f,g\in\mathbb{R}[X],\ f=(m^2-1)X^5+4X^4-mX^3+X^2-(m+3)X-1$ și $g=X-1$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că g divide f.

29. Fie $f,g\in\mathbb{R}[X],\ f=X^4-3X^3+(b^2+2)X^2+aX+2b$ și $g=X^2+1$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât f să se dividă cu g.

30. Fie polinoamele $f=X^4+a$ și $g=X^2+\hat{3}X+2,\ f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$. Să se determine $a\in\mathbb{Z}_5$ astfel încât g să dividă polinomul f.

31. Să se arate că polinomul f are rădăcinile indicate în cazurile:

a) $f\in\mathbb{R}[X], f=X^3-4X^2+3X+2, x_0=2$;

b) $f\in\mathbb{Q}[X],\ f=X^4+3X^3-5X^2-9X+10, x_0=-2$;

c) $f\in\mathbb{Q}[X], f=2X^4-5X^3+4X^2+X-1,\ x_0=\frac{1}{2}$;

d) $f\in\mathbb{Z}_5[X], f=X^4+\hat{3}X^3+\hat{2}X^2+\hat{4}X-\hat{1}, x_0=\hat{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

32. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f = (m^2-3)X^4 + 2mX^3 + 5X^2 + (m-1)X + 2$ să aibă rădăcina $x = 2$.

33. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f = X^3 + mX^2 - mX - 4 \in \mathbb{R}[X]$ are rădăcina $x_0 = \sqrt{2}$.

34. Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X], f = X^3 - (3m-5)X^2 + mX + m^2 - 1$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_0 = -1$ să fie o rădăcină a polinomului.

b) Pentru $m = 1$ să se determine toate rădăcinile polinomului.

35. Fie polinomul $f \in \mathbb{Z}_5[X], f = X^3 + mX^2 + (m+\hat{2})X + \hat{1}$. Să se determine $m \in \mathbb{Z}_5$ astfel ca f să aibă rădăcina $x_0 = \hat{2}$.

36. Fie polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X], f = X^3 + (m+1)X^2 + \hat{2}X + m^2$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, știind că $x_0 = \hat{1}$ este rădăcină pentru f.

b) Pentru $m = \hat{1}$ să se determine toate rădăcinile polinomului f.

37. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{Z}_6[X], f = X^3 + (\hat{2}a + \hat{1})X + a + \hat{4}$.

a) Să se demonstreze că $b^3 = b$, $\forall\, b \in \mathbb{Z}_6$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{Z}_6$, știind că $f(\hat{2}) = \hat{0}$.

c) Pentru $a = \hat{2}$ să se rezolve ecuația $f(x) = \hat{0}$, $x \in \mathbb{Z}_6$. *(Bacalaureat 2009)*

38. Se consideră inelul polinoamelor $\mathbb{Z}_3[X]$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_3$ astfel încât polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^2 + aX + b$ are rădăcinile $\hat{1}$ și $\hat{2}$.

b) Să se determine câtul și restul împărțirii polinoamelor $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$, $g = X + \hat{1}$.

c) Să se demonstreze că dacă $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = (a^3 + \hat{2}a)X^2 + \hat{2}aX + \hat{1}$, atunci $f(\hat{1}) = \hat{2}a + \hat{1}$. *(Bacalaureat 2009)*

39. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcini α pentru polinoamele:

a) $f = X^5 - 3X^4 - X^3 + 11X^2 - 12X + 4 \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha = 1$;

b) $g = X^4 + 4X^3 + 3X^2 - 4X - 4 \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha = -2$;

c) $h = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$, $\alpha = \hat{1}$.

40. Să se rezolve ecuația $x^3 + 5X^2 + 3x - 9 = 0$ știind că are o rădăcină reală dublă.

41. Să se determine parametrii reali a și b astfel încât polinomul $f = X^4 + 6X^3 + 8X^2 - aX + b$ are rădăcina dublă $x = -3$. Să se determine celelalte rădăcini.

42. Fie $f \in \mathbb{R}[X], f = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + aX + b$.

a) Să se determine a și b știind că $x = -1$ este rădăcină dublă.

b) Pentru $a = b = 4$ să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

43. Să se determine polinomul $f \in K[X]$, grad $f = 3$ știind că:

Scanned with OKEN Scanner

a) $f \in \mathbb{R}[X]$ şi $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3$ sunt rădăcini;

b) $f \in \mathbb{R}[X]$ şi $x_1 = x_2 = 4, x_3 = -2$ sunt rădăcini;

c) $f \in \mathbb{Z}_5[X]$ şi $x_1 = x_2 = \hat{3}, x_3 = \hat{4}$ sunt rădăcini.

44. Să se determine rădăcinile întregi ale polinoamelor:

a) $f = X^3 - 3X^2 - 10X + 24$; b) $f = 4X^3 - 4X^2 - 7X - 2$.

45. Să se rezolve ecuaţiile ştiind soluţiile date:

a) $x^4 - 3x^3 + 6x - 4, x_1 = \sqrt{2}$; b) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x + 4 = 0, x_1 = 1 - \sqrt{3}$;

c) $x^3 - 5x^2 + x + 7 = 0, x_1 = 3 + \sqrt{2}$.

46. Să se determine $a, b \in \mathbb{Q}$ ştiind că ecuaţiile au rădăcina specificată:

a) $x^3 + 6x^2 - ax + b = 0, x_1 = \sqrt{5}$; b) $x^4 - 8x^3 + 16x^2 + ax + b = 0, x_1 = 3 + \sqrt{2}$.

47. Să se descompună în produs de factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ polinoamele:

a) $f = 4X^4 - 13X^2 + 9$; b) $f = 25X^4 - 10X^2 + 1$;

c) $f = 4X^3 - 3X^2 - 3X + 4$; d) $f = X^3 - 8$.

48. Să se rezolve ecuaţiile reciproce:

a) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$; b) $5x^3 - 21x^2 - 21x + 5 = 0$;

c) $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$.

49. Se consideră ecuaţia algebrică $2x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 7x + a^2 - 2a - 1 = 0, a \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine parametrul real a ştiind că ecuaţia este reciprocă.

b) Pentru $a = 3$ să se rezolve ecuaţia în $\mathbb{R}$.

50. Să se determine soluţiile raţionale ale ecuaţiilor:

a) $12x^3 - 4x^2 - 3x + 1 = 0$; b) $4x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 8x + 3 = 0$;

c) $4x^3 - 8x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$; d) $8x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 2x - 1 = 0$.

51. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X-1)^{10} + (X-2)^{10}$ şi $g = X^2 - 3X + 2$.

a) Să se descompună în produs de factori polinomul g.

b) Să se demonstreze că polinomul f nu este divizibil cu polinomul g.

c) Să se determine restul împărţirii polinomului f la polinomul g. *(Bacalaureat 2009)*

52. Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + aX^3 + bX^2 - 5X + 6$ şi $g = X^3 + X - 2$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

b) Pentru $a = -3$ şi $b = 1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $3^{3x} - 3^{2x+1} + 3^x - 5 + 6 \cdot 3^{-x} = 0$. *(Bacalaureat 2009)*

53. Se consideră polinomul $f = X^4 + mX^2 + n$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

a) Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ ştiind că polinomul f admite rădăcinile $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile polinomului să verifice relaţia $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2$.

c) Pentru $m = 1$ şi $n = 1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

54. Se consideră polinomul $f = X^3 - 9X^2 - X + 9$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X^2 - 1$.

b) Să se verifice că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) - 18$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $f(3^x)=0$. (*Bacalaureat 2009*)

55. Fie $f\in\mathbb{Q}[X], f=X^3-2X^2+aX+6$ și suma $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

a) Să se determine $a\in\mathbb{Q}$ astfel încât $x_1=3$ să fie rădăcină a lui f.

b) Pentru $a=-5$ să se rezolve ecuația $f(x)=0$.

c) Pentru $a=-5$ să se arate că $2(S_2-S_1^2)=S_3$.

56. Fie $f\in\mathbb{R}[X], f=mX^3+11X^2+7X+m$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să se dividă cu $X-1$.

b) Să se determine $m\in\mathbb{Q}$ astfel încât $f(\sqrt{2})\in\mathbb{Q}$.

c) Pentru $m=-9$ să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f. (*Bacalaureat 2009*)

57. Se consideră polinomul $f=X^3-(m+1)X^2-3X+3, f\in\mathbb{Q}[X]$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{Q}$ astfel încât suma rădăcinilor polinomului f să fie egală cu 1.

b) Să se determine $m\in\mathbb{Q}$ știind că $x_1=\sqrt{3}$ este rădăcină a polinomului f.

c) Pentru $m=0$ să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$. (*Bac2009*)

58. Fie $f=X^3+aX^2+X+\hat{1}$ și $g=X+\hat{3}$ polinoame din $\mathbb{Z}_5[X]$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{Z}_5$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

b) Pentru $a=\hat{1}$ să se arate că $f=(X+\hat{1})(X^2+\hat{1})$.

c) Pentru $a=\hat{1}$ să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ ecuația $f(x)=\hat{0}$. (*Bacalaureat 2009*)

59. Se consideră ecuația $x^4-ax^3-ax+5=0$ cu soluțiile x_1, x_2, x_3, x_4 și $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine a astfel încât $x_1+x_2+x_3+x_4=3$.

b) Pentru $a=3$ să se calculeze $s_1=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$ și $s_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

60. Se consideră polinomul $f=X^4-14X^2+45, f\in\mathbb{R}[X]$.

a) Să se arate că $f=(X^2-7)^2-4$.

b) Să se descompună în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

c) Să se rezolve ecuația $f(x)=0$.

61. Fie $f\in\mathbb{R}[X], f=X^3-4X^2+2mX-5$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că $x=-1$ este rădăcină a polinomului.

b) Să se demonstreze că dacă $m\in(4,+\infty)$, atunci f nu are toate rădăcinile reale.

62. Fie polinomul $X^4-X^3+aX^2+bX+c$, $a, b, c\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $a=c=1$ și $b=-1$ să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la X^2+1.

b) Să se determine numerele $a, b\, c$ știind că restul împărțirii polinomului f la X^2+1 este X, iar restul împărțirii polinomului f la $X-1$ este -1.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se demonstreze că dacă $a \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, atunci f nu are toate rădăcinile reale. (*Bac 2009*)

63. Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X], f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

a) Să se calculeze suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

b) Să se determine rădăcinile polinomului f ştiind că $a = -1,\ b = -2,\ c = 0$.

c) Ştiind că rădăcinile polinomului f sunt în progresie aritmetică să se demonstreze că $b = a - 1$.

64. Se consideră ecuaţia algebrică $x^3 - 7x^2 + (3a-1)x - 8 = 0$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ ştiind că rădăcinile ecuaţiei sunt numere în progresie geometrică.

b) Pentru $a = 5$ să se rezolve ecuaţia.

65. Se consideră ecuaţia algebrică $x^3 - 3x^2 - 6x + m = 0$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ ştiind că soluţiile ecuaţiei sunt în progresie aritmetică.

b) Pentru $m = 8$ să se rezolve ecuaţia.

66. Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X], f = X^3 - 2X^2 + aX + b,$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Pentru $a = 1$ şi $b = 0$ să se determine x_1, x_2, x_3.

b) Ştiind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2,$ să se arate că $a = 1$.

c) Ştiind că $f = (X - x_1^2)(X - x_2^2)(X - x_3^2),$ să se determine numerele reale a şi b.

(*Bacalaureat 2009*)

67. Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X], f = X^3 - X + \frac{1}{4}$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g = X - \frac{1}{2}$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărţirii polinomului f la $X - a$ să fie egal cu $f(0)$.

c) Să se calculeze determinantul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

68. Se consideră numerele reale x_1, x_2, x_3 cu proprietatea că $x_1 + x_2 + x_3 = 2,\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{2}$ şi $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -2$.

a) Să se calculeze $x_1x_2x_3$.

b) Să se afle $a, b, c \in \mathbb{R}$ ştiind că ecuaţia $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ are soluţiile x_1, x_2, x_3.

c) Să se descompună polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2X + 4$ în factori ireductibili peste $\mathbb{R}[X]$.

(*Bacalaureat 2009*)

69. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $c \in \mathbb{R}$ ştiind că $f(1) + f(-1) = 2012$.

b) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ dacă o rădăcină a polinomului este $x_1 = 1$ şi $f(0) = -3,\ f(2) = 35$.

c) Pentru $a = 3,\ b = -1,\ c = -3$ şi să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

70. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X],\ f = X^3 - 3X + a$ şi $g = X^2 - 3X + 2,\ a \in \mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Pentru $a=2$ să se rezolve ecuaţia $f(x)=g(x)$.

b) Să se determine rădăcinile polinomului f ştiind că are o rădăcină dublă pozitivă.

c) Pentru $a=2$ să se rezolve ecuaţia $e^{f(x)}=g\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$. *(Bacalaureat 2009)*

Elemente analiză matematică

I. PRIMITIVE

Definiţie

Funcţia $f:I\to\mathbb{R}$ admite primitive pe intervalul I, dacă există funcţia $F:I\to\mathbb{R}$ cu proprietăţile:

a) F este derivabilă pe I.

b) $F'(x)=f(x),\forall x\in I$.

Funcţia F se numeşte **primitiva** (antiderivata) funcţiei f.

Teoremă

Orice funcţie continuă $f:I\to\mathbb{R}$ admite primitive pe intervalul I.

Definiţie

Mulţimea primitivelor unei funcţii $f:I\to\mathbb{R}$ se numeşte **integrală nedefinită** a funcţiei f şi se notează $\int f(x)\,dx$.

- Dacă F este o primitivă a funcţiei $f:I\to\mathbb{R}$, atunci $\int f(x)\,dx=F(x)+C$.
- Dacă $f,g:I\to\mathbb{R}$, admit primitive pe I, atunci:
  a) $f+g$ admite primitive pe I;
  b) $\int(f(x)+g(x))\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$
- Dacă $f,g:I\to\mathbb{R}$ admit primitive pe I, atunci:

$\int(\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\cdot\int f(x)\,dx+\beta\cdot\int g(x)\,dx$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ nesimultan nule, (proprietatea de liniaritate a integralei).

Primitive uzuale

- $\int 1\,dx=x+C$;
- $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C, n\in\mathbb{N}$;
- $\int x^\alpha\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$;
- $\int e^x\,dx=e^x+C, x\in\mathbb{R}$;
- $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}, a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$;
- $\int\frac{1}{x}\,dx=\ln x+C, x\in(0,+\infty)$;
- $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$;
- $\int\cos x\,dx=\sin x+C$;
- $\int\frac{1}{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$;
- $\int\frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)+C$;

Scanned with OKEN Scanner

- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C, x\in(-a,a)$;
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg}x+C$;
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg}x+C$;
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$

Metoda schimbării de variabilă

- $\int u^n(x)u'(x)dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1}+C, n\in\mathbb{N}$;
- $\int u^\alpha(x)\cdot u'(x)dx = \frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+C, \alpha\neq -1$;
- $\int e^{u(x)}\cdot u'(x)dx = e^{u(x)}+C$;
- $\int a^{u(x)}dx\cdot u'(x)dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a}+C$;
- $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln u(x)+C$;
- $\int \frac{u'(x)}{u^2(x)-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u(x)-a}{u(x)+a}\right|+C$;
- $\int \frac{u'(x)}{u^2(x)+a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u(x)}{a}+C$;
- $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{a^2-u^2(x)}}dx = \arcsin\frac{u(x)}{a}+C$;
- $\int \frac{1}{\sin^2 u(x)}\cdot u'(x)dx = -\operatorname{ctg}u(x)+C$;
- $\int \frac{1}{\cos^2 u(x)}\cdot u'(x)dx = \operatorname{tg}u(x)+C$;
- $\int \frac{1}{\sqrt{u^2(x)+a}}u'(x)dx = \ln\left|u(x)+\sqrt{u^2(x)+a}\right|+C$

Metoda integrării prin părţi

Fie $u,v: I\to\mathbb{R}$, funcţii derivabile cu derivata continuă. Atunci:

a) $u(x)\cdot v'(x) = (uv)'(x)-u'(x)\cdot v(x), \forall x\in I$;

b) $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx, x\in I$ (formula de integrare prin părţi)

1. Să se determine funcţia $f: D\to\mathbb{R}$, pentru care o primitivă a sa este de forma:

a) $F(x) = x^3-2x^2+x-1,\ x\in\mathbb{R}$;

b) $F(x) = \frac{x^{2011}}{2011}+\frac{x^{2010}}{2010}+2009,\ x\in\mathbb{R}$;

c) $F(x) = (x^3+2x)^4,\ x\in\mathbb{R}$;

d) $F(x) = \frac{x+3}{x^2+5},\ x\in\mathbb{R}$;

e) $F(x) = 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x},\ x>0$;

f) $F(x) = 2^x+x\cdot 3^x,\ x\in\mathbb{R}$;

g) $F(x) = (x^2+1)\ln x,\ x>0$;

h) $F(x) = (x^2-x-2)e^x$;

i) $F(x) = x^2\cos x+\sin x,\ x\in\mathbb{R}$;

j) $F(x) = \cos^4 x-\sin^4 x,\ x\in\mathbb{R}$;

k) $F(x) = \operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

l) $F(x) = x(\arcsin x+\arccos x),\ x\in(-1,1)$;

m) $F(x) = (x^2+1)\operatorname{arctg}x,\ x\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Să se determine parametrii reali pentru care funcția $F:D\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f:D\to\mathbb{R}$ în cazurile:

a) $F(x)=ax^2+bx+1,\ f(x)=4x-5;$ b) $F(x)=3x^2-4x,\ f(x)=(4a-1)x+b;$

c) $F(x)=e^x\left(ax^2+bx+c\right), f(x)=e^x\left(3x^2+7x-4\right);$ d) $F(x)=x+(x+1)\ln x, f(x)=\ln x+\frac{a}{x}+b.$

3. Să se studieze dacă funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ admit primitive:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 1\\ 2x-1, & x>1\end{cases};$ b) $f(x)=\begin{cases}5x+\sin x, & x\le 0\\ \ln(x+1)+x^2, & x>0\end{cases};$

c) $f(x)=\begin{cases}e^x+2, & x<0\\ \dfrac{2x+3}{x+1}, & x\ge 0\end{cases};$ d) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+3}, & x\ge 1\\ 5x-3, & x<1\end{cases}.$

4. Să se determine parametrul $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ admit primitive pe $\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases}3x+a-2, & x\le 0\\ \sin x, & x>0\end{cases};$ b) $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{4x}, & x\le 2\\ \log_3(x+a), & x>2\end{cases}.$

5. Să se determine mulțimea primitivelor funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+x;$ b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x^3-3x^2+2x-1;$

c) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\sqrt[3]{x};$ d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+2^x;$

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2\sin x-\cos x.$

6. Să se calculeze:

a) $\int\left(5x^4-3x^2+x+1\right)dx,\ x\in\mathbb{R};$ b) $\int\left(8x^3+6x^2-2\right)dx,\ x\in\mathbb{R};$

c) $\int\left(x^2\sqrt{x}+1\right)dx,\ x>0;$ d) $\int\left(5^x+2^x\right)dx,\ x\in\mathbb{R};$

e) $\int\frac{1}{x^2-16}dx,\ x\in(-1,1);$ f) $\int\frac{1}{25-x^2}dx,\ x>5;$

g) $\int\frac{1}{4+x^2}dx,\ x\in\mathbb{R};$ h) $\int(2\sin x+3\cos x)dx,\ x\in\mathbb{R};$

i) $\int(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)dx,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right);$ j) $\int\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx,\ x\in(0,2);$

k) $\int\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}dx,\ x\in\mathbb{R};$ l) $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-81}}dx,\ x>9;$

m) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx,\ x>0.$

7. Să se calculeze:

a) $\int(x+1)e^x\,dx,\ x\in\mathbb{R};$ b) $\int\ln x\,dx,\ x>0;$ c) $\int x\ln x\,dx,\ x>0;$

d) $\int x^2\cdot e^x\,dx,\ x\in\mathbb{R};$ e) $\int\ln^2 x\,dx,\ x>0;$ f) $\int x\sin x\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

g) $\int x\cos x\,dx,\ x\in\mathbb{R};$ h) $\int\sin^2 x\,dx,\ x\in\mathbb{R};$ i) $\int(x+2)\sin x\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

j) $\int\left(x^2+x\right)e^{-x}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$ k) $\int\frac{\ln^3 x}{x}dx,\ x>0;$ l) $\int x^3\ln x\,dx,\ x>0.$

Scanned with OKEN Scanner

8. Să se calculeze:

a) $\int (x^2+x)^6 \cdot (2x+1)\,dx,\ x\in\mathbb{R}$; b) $\int (2x^3-x^2+1)^5 \cdot (3x^2-x)\,dx,\ x\in\mathbb{R}$;

c) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+9}\,dx,\ x\in\mathbb{R}$; d) $\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx,\ x\in\mathbb{R}$; e) $\int \frac{2x}{x^4+5}\,dx,\ x\in\mathbb{R}$;

f) $\int \frac{x^2}{x^6-16}\,dx,\ x\in(4,\infty)$; g) $\int \sin^5 x\cdot\cos x\,dx,\ x\in\mathbb{R}$; h) $\int \cos^6 x\cdot\sin x\,dx,\ x\in\mathbb{R}$;

i) $\int \frac{1+e^x}{e^x+x}\,dx,\ x>0$; j) $\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx,\ x>0$; k) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^4}}\,dx,\ x\in(0,1)$;

l) $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2}\,dx,\ x\in\mathbb{R}$; m) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,(\arcsin x)}\,dx,\ x\in(0,1)$;

n) $\int \sqrt{x+5}\,dx,\ x>0$; o) $\int x\sqrt{x^2+8}\,dx,\ x\in\mathbb{R}$; p) $\int x^2\sqrt[3]{x^3+1}\,dx,\ x\in\mathbb{R}$;

q) $\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx,\ x\in\mathbb{R}$; r) $\int \frac{1}{(x-1)^2-1}\,dx,\ x>2$; s) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx$.

9. Se consideră funcţia $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

a) Să se determine funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ astfel încât funcţia F să fie o primitivă a funcţiei f.

b) Să se demonstreze că F este descrescătoare pe $[0,+\infty)$. *(Bacalaureat 2009)*

10. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2, & x\le 1 \\ \ln x, & x>1 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcţia f admite primitive.

b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este convexă pe $(1,+\infty)$.

11. Să se determine primitiva F a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relaţia specificată:

a) $f(x)=x^3-4x+1,\ F(2)=2010$; b) $f(x)=x-\frac{1}{x},\ F(e)=-1$;

c) $f(x)=\frac{1}{x^2+4},\ F(2)=\frac{\pi}{4}$; d) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}},\ F(4)=1$;

II. INTEGRALA DEFINITĂ

Teoremă (formula lui Leibniz Newton)

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a,b]$. Atunci pentru oricare primitivă F a funcţiei f are loc egalitatea $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

Teoremă (liniaritatea integralei)

Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funcţii continue pe $[a,b]$ şi $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Atunci are loc egalitatea:

$$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx.$$

Teoremă (aditivitatea la interval)

Scanned with OKEN Scanner

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ şi $c\in[a,b]$. Dacă funcţia f este continuă pe intervalele $[a,c]$ şi $[c,b]$, atunci f este continuă pe $[a,b]$ şi $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$.

Teoremă

Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funcţii continue pe $[a,b]$.

a) Dacă $f(x)\geq 0,\forall x\in[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$

(pozitivitatea integralei).

b) Dacă $f(x)\leq g(x),\forall x\in[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$ (monotonia integralei).

Teoremă (proprietatea de medie a integralei)

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, o funcţie continuă pe $[a,b]$ şi $m=\inf\{f(x)/x\in[a,b]\}$ şi $M=\sup\{f(x)/x\in[a,b]\}$.

Are loc inegalitatea $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)$.

Teoremă (teorema de medie)

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci există $\varepsilon\in[a,b]$, cu proprieatea că $f(\varepsilon)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

1. Să se calculeze integralele definite:

a) $\int_0^1\left[(2x-1)^2-x^2+x\right]dx$; b) $\int_{-1}^1\left[(x-1)^3-3x+1\right]dx$; c) $\int_1^2\left(x\sqrt[3]{x}+x^2\right)dx$;

d) $\int_0^2\frac{1}{x^2+4}dx$; e) $\int_1^2\frac{1}{x^2-25}dx$; f) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx$;

g) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$; h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$.

2. Să se calculeze:

a) $\int_0^1\left(x^3-x\right)^4\cdot\left(3x^2-1\right)dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^3 x\cdot\cos x\,dx$; c) $\int_0^1\frac{x}{4+x^4}dx$;

d) $\int_0^1 x\sqrt{1+2x^2}\,dx$; e) $\int_0^1 x^2e^x\,dx$; f) $\int_0^1\frac{x^2}{x^6-8}dx$;

g) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{2+\cos x}dx$; h) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{ctg}x\,dx$; i) $\int_0^1 x\ln\left(x^2+3\right)dx$.

3. Să se calculeze:

Scanned with OKEN Scanner

a) $\int_1^e \ln^2 x\,dx$; b) $\int_1^2 x\cdot 2^x\,dx$; c) $\int_0^1 (x^2+x)e^x\,dx$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$; e) $\int_0^1 \arcsin x\,dx$; f) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

g) $\int_1^2 \sqrt{9-x^2}\,dx$; h) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

4. Să se arate că $\int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx = \frac{e-2}{2} + \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2}dx$. *(Bacalaureat 2009)*

5. Să se calculeze integralele următoarelor funcţii raţionale:

a) $\int_0^1 \frac{2x-3}{x+2}dx$; b) $\int_2^3 \frac{x^2}{x-1}dx$; c) $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx$; d) $\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x}dx$;

e) $\int_1^2 \frac{1}{x^2-6x+5}dx$; f) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+4x+5}dx$; g) $\int_{-1}^0 \frac{x^2-2x+7}{(x-1)^2}dx$; h) $\int_0^1 \frac{x+1}{(x-2)(x-3)}dx$;

i) $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}dx$; j) $\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}dx$.

6. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+e^{-x}$.

Ştiind că $f(x)\geq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ să se arate că $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \geq \frac{2}{3}$.

7. Se consideră integralele $I_n = \int_0^1 \frac{x^n+1}{x+1}dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Folosind inegalitatea $x^2\leq x,\ \forall x\in[0,1]$ să se demonstreze că $I_1\leq I_2$.

c) Să se demonstreze că $I_{n+1}+I_n = \frac{1}{n+1}+\ln 4,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. *(Bacalaureat 2009)*

8. Se consideră integralele $I_n = \int_e^{e^2} \frac{\ln^n x}{x}dx,\ n\in\mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_0+I_1.

b) Ştiind că $1\leq \ln x\leq 2,\ \forall x\in[e,e^2]$, să se demonstreze că $1\leq \frac{2^{n+1}-1}{n+1}\leq 2^n,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

9. Se consideră integralele $I_n = \int_0^1 x(1+x)^n\,dx,\ n\in\mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Folosind inegalitatea $(1+x)^n\leq(1+x)^{n+1},\ \forall x\in[0,1]$ şi $n\in\mathbb{N}$ să se arate că $I_{2010}<I_{2011}$.

10. Fie funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=1-x+x^2-x^3+\ldots+x^{2010}-x^{2011}$.

a) Să se arate că $f(x)=\frac{1-x^{2012}}{1+x},\ \forall x\in[0,1]$. b) Să se arate că $\int_0^1 (x+1)\cdot f(x)\,dx<1$.

Scanned with OKEN Scanner

11. Se consideră integralele $I_n = \int_e^{e^2} x \ln^n x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_0. b) Să se arate că $I_n \leq I_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Să se demonstreze că $I_n = \frac{e^2\left(e^2 \cdot 2^n - 1\right)}{2} - \frac{n}{2} \cdot I_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *(Bacalaureat 2009)*

12. Se consideră funcţiile $f, g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ şi $g(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

a) Să se arate că f este o primitivă a funcţiei g.

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x) \cdot g(x) \, dx$.

c) Să se determine $a \in (1, +\infty)$ din ecuaţia $\int_1^a f(x) \, dx = 2$. *(Bacalaureat 2009)*

13. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 - 3x^2, & x \leq 0 \\ 1 - x + \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$.

a) Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$. b) Să se calculze $\int_{-1}^4 f(x) \, dx$.

14. Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ şi numerele $a, b, c \in (0, +\infty)$. Să se demonstreze că dacă numerele $\int_1^a f(x) \, dx$, $\int_1^b f(x) \, dx$, $\int_1^c f(x) \, dx$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci numerele a, b, c sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

15. Fie funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + \left(a^2 - 2\right)x + 1$. Să se determine $a \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\int_0^1 f(x) \, dx = \frac{8}{3}$.

III. APLICAŢII ALE INTEGRALEI DEFINITE

3.1. Arii şi volume

Teoremă (calculul ariei suprafeţelor plane)

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi pozitivă. Atunci:

a) Mulţimea $\Gamma_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\right\}$ are arie;

b) Aria $\left(\Gamma_f\right) = \int_a^b f(x) \, dx$.

Teoremă

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcţie continuă, astfel încât $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$. Atunci mulţimea $\Gamma_{f,g} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\right\}$, cuprinsă între graficele funcţiilor f, g şi dreptele $x = a, x = b$ are arie şi aria $\left(\Gamma_{f,g}\right) = \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right) dx$.

Volumul corpurilor de rotaţie.

Scanned with OKEN Scanner

Teoremă (calculul volumelor corpurilor de rotaţie).
Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ o funcţie continuă şi C_f corpul de rotaţie determinat de f. Atunci:

a) C_f are volum; b) $\mathcal{V}(C_f)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$.

1. Să se arate că funcţiile sunt pozitive şi să se calculeze aria (Γ_f) în cazurile:

a) $f:[1,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=3x+5$; b) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2+4x+1$;

c) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+2)e^x$; d) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x\operatorname{arctg}x$.

2. Să se calculeze aria suprafeţelor cuprinse între graficele funcţiilor f şi g:

a) $f,g:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+1,\ g(x)=x+1$;

b) $f,g:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2+2x,\ g(x)=0$;

c) $f,g:[0,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-3x,\ g(x)=3x-x^2$.

3. Fie funcţia $f:[-1,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+4, & x\le 1\\ 3x^2+x+1, & x>1\end{cases}$.

Să se calculeze aria subgraficului funcţiei f.

4. Să se calculeze aria suprafeţei cuprinsă între graficul funcţiei $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$, axa Ox, axa Oy şi dreapta $x=1$.

5. Să se calculeze aria suprafeţei cuprinse între graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+x$ şi dreapta $y=-2x$.

6. Fie funcţia $f:[0,e-1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{x+1}$. Să se determine aria suprafeţei mărginite de graficul funcţiei f şi axa Ox.

7. Fie funcţia $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x(1+\ln x)}$. Să se determine numărul real $a\in(1,e^2)$ astfel încât aria suprafeţei plane determinate de graficul funcţiei f, axa Ox, dreptele de ecuaţii $x=a$ şi $x=e^2$ să fie egală cu $\ln\dfrac{3}{2}$. *(Bacalaureat 2009)*

8. Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$.

9. Să se calculeze volumul corpurilor de rotaţie în jurul axei Ox, pentru următoarele funcţii:

a) $f:[-1,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=3$; b) $f:[1,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=-x+4$;

c) $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-1$; d) $f:[0,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{3x^2-x+4}$;

e) $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=2^x$; f) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$;

g) $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x^2+3x+2}}$; h) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{(x+1)(x+3)}}$.

Scanned with OKEN Scanner

10. Să se afle volumul corpului de rotaţie asociat funcţiei $f:[1,e]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{\frac{\ln x}{x}}$.

11. Să se determine $a\in(0,+\infty)$ astfel încât volumul corpului de rotaţie asociat funcţiei $f:[1,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{a}\cdot x$ să fie egal cu 14π.

12. Să se determine $a\in(0,+\infty)$ astfel încât volumul corpului de rotaţie asociat funcţiei $f:[2,2+a]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{2x-3}$ să fie egal cu 2π.

13. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=ax-3,\ a\in\mathbb{R}^*$.

a) Să se determine volumul corpului de rotaţie asociat funcţiei f.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}^*$ astfel încât volumul corpului de rotaţie să fie minim.

3.2. Probleme de sinteză

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2+e^x, & x\le 0\\ \sqrt{x}+1, & x>0\end{cases}$.

a) Să se arate că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{0} xf(x)\,dx$.

c) Să se determine volumul corpului de rotaţie obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)$. *(Bacalaureat 2009)*

2. Se consideră funcţiile $f, F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=xe^x$ şi $F(x)=(x-1)e^x$.

a) Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze aria suprafeţei plane dintre graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se demonstreze că $\int_{1}^{x}\frac{f(t)f''(t)-(f'(t))^2}{f^2(t)}\,dt=\frac{x+1}{2}-2,\ x>1$. *(Bacalaureat 2009)*

3. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}e\cdot e^x, & x\le -1\\ 2+x, & x>-1\end{cases}$.

a) Să se arate că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,2]\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)$.

c) Să se calculeze $\int_{-2}^{0}\frac{xf(x)}{2}\,dx$. *(Bacalaureat 2009)*

4. Fie funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=(x+1)^3-3x^2-1$.

a) Să se calculeze $\int_{0}^{1} g(x)\,dx$.

b) Să se determine numărul real $a>1$ astfel încât $\int_{1}^{a}\left(g(x)-x^3\right)\cdot e^x\,dx=6e^a$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se calculeze $\int_0^1 (3x^2+3)g^{2011}(x)\,dx$.

5. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^x+1$.

a) Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)\,dx$. c) Să se demonstreze că $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x}\,dx = e+\frac{1}{3}$. *(Bac 2009)*

6. Se consideră funcţiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ şi $g(x)=\frac{1}{x}$.

a) Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei $f+g$.

b) Să se arate că $\int_1^2 \left(f^2(x)+g^2(x)\right)dx = \frac{e^4-e^2+1}{2}$.

c) Folosind eventual faptul că $2ab\le a^2+b^2$, pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$, să se demonstreze că $\int_1^2 e^x\cdot\frac{1}{x}\,dx \le \frac{e^4-e^2+1}{2}$. *(Bacalaureat 2009)*

7. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^x}$ şi $g(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^x}$.

a) Să se verifice că funcţia g este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f'(x)g'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. *(Bacalaureat 2009)*

8. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x$.

a) Să se calculeze $\int_1^e \left(f(x)-\frac{\ln x}{x}\right)dx$. b) Să se verifice că $\int_1^e f(x)\,dx = \frac{e^2}{2}$.

c) Să se arate că şirul cu termenul general $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x)-x)\,dx$, $n\ge 1$ este o progresie aritmetică cu raţia 1. *(Bacalaureat 2009)*

9. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 (x+1)f(x)\,dx$.

b) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Folosind faptul că $1\le (x+1)^2\le 4$, $x\in[0,1]$, să se arate că volumul corpului de rotaţie asociat funcţiei f este un număr din intervalul $\left[\frac{\pi}{28},\frac{\pi}{7}\right]$. *(Bacalaureat 2009)*

10. Se consideră funcţiile $f_n:[1;4]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sqrt{x^n+4x}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se verifice că $\int_1^4 f_1(x)\,dx = \frac{14\sqrt{5}}{3}$. b) Să se calculeze $\int_1^4 \frac{x+2}{f_2^2(x)}\,dx$.

c) Să se calculeze volumul corpului de rotaţie asociat funcţiei $g:[1,4]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f_2(x)}$.

(Bacalaureat 2009)

11. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x^n}{\sqrt{x+1}}$.

a) Să se calculeze $\int f_1(x)\cdot\sqrt{x+1}\,dx$.

b) Să se calculeze volumul corpului de rotaţie asociat funcţiei f_1.

c) Folosind inegalitatea $\sqrt{x+1}\geq 1$, $\forall x\in[0,1]$, să se arate că $\int_0^1 f_{2010}(x)\,dx\leq\frac{1}{2011}$.

12. Se consideră funcţia $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=ax+1$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+x+1$ să fie o primitivă a funcţiei f_a.

b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x\cdot f_1(x)\,dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f_a^2(x)\,dx\geq\frac{1}{4}$ pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

13. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{e^x}{e^{nx}+1}$.

a) Să se calculeze $\int f_0(x)\,dx$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f_1, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se arate că $\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx\leq\int_0^1 f_n(x)\,dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$. *(Bacalaureat 2009)*

14. Se consideră funcţiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x$, $g(x)=x\cdot e^x$.

a) Să se determine $\int f(x)\,dx$.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}$. *(Bacalaureat 2009)*

15. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2011}+x+1$.

a) Să se determine primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcţiei f, care verifică condiţia $F(0)=2010$.

b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x^{2011}-2$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^{2012}}$.

16. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+mx^2+nx+p$, unde $m,n,p\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $m=0$, $n=-3$, $p=2$, să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

b) Să se determine $m,n,p\in\mathbb{R}$ ştiind că $f'(-1)=f'(1)=0$ şi $\int_{-1}^1 f(x)\,dx=4$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4}\cdot\int_0^x f(t)\,dt$. *(Bacalaureat 2009)*

17. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+x-2, & x<1\\ (x+1)\ln x, & x\geq 1\end{cases}$.

a) Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$. b) Să se verifice că $\int_0^1 f(x)\,dx=-\dfrac{7}{6}$.

c) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $h:[1,\,e]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{f(x)}{x+1}$. *(Bacalaureat 2009)*

18. Se consideră funcţiile $F,f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$, $f(x)=(x+1)e^x$.

a) Să se verifice că F este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei F, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$, $x=1$.

c) Să se calculeze $\int_0^1\dfrac{F(x)-f(x)}{e^x+1}\,dx$. *(Bacalaureat 2009)*

19. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţia $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^n}$.

a) Să se verifice că $\int_1^e f_1\left(\sqrt{x-1}\right)dx=1$.

b) Să se determine primitiva G a funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{f_2(x)}$, care verifică relaţia $G(1)=\dfrac{13}{15}$. *(Bacalaureat 2009)*

c) Să se calculeze $\int_0^1 x\cdot f_n(x)\,dx$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

20. Se consideră funcţiile $f,F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\dfrac{x-1}{x}$ şi $F(x)=e^x+x-\ln x$.

a) Să se demonstreze că funcţia F este o primitivă pentru funcţia f.

b) Să se calculeze $\int_1^2 x\left(F(x)-x+\ln x\right)dx$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ să fie egală cu $e^m - 2$. *(Bacalaureat 2009)*

21. Se consideră funcția $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + 1$.

a) Să se arate că $\int_0^1 (x+1)(x+2) f(x)\,dx = \frac{22}{3}$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Să se determine $k > 0$ astfel încât aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=k$ să fie egală cu $k + \ln k$. *(Bacalaureat 2009)*

22. Se consideră funcția $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $h:[0,2] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)$.

c) Să se arate că dacă $a > 0$, atunci $\frac{1}{a+2} \le \int_a^{a+1} f(x)\,dx \le \frac{1}{a+1}$.

23. Se consideră funcția $f:[2,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$.

a) Să se calculeze $\int_2^e \left(f(x) - \frac{1}{x-1} \right) dx$.

b) Să se arate că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $[2,+\infty)$.

c) Să se determine $a \in (2,+\infty)$ astfel încât aria suprafeței plane, mărginite de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=2$ și $x=a$ să fie egală cu $\ln 3$. *(Bacalaureat 2009)*

24. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) \cdot e^{-x}\,dx$.

b) Să se arate că $\int_0^1 f''(x)\,dx = 2e - 1$.

c) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x}\,dx$. *(Bacalaureat 2009)*

25. Fie funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \le 1 \\ 3x^2+2, & x > 1 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive.

b) Să se calculeze $\int_0^2 f(x)\,dx$.

c) Să se determine $a \in (1,+\infty)$ astfel încât aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=a$, $x=a+1$ să fie egală cu 20.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTE DE SUBIECTE PENTRU BACALAUREAT

VARIANTA 01

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se arate că $\log_3 \frac{1}{81} + \sqrt{16} + C_{2017}^{2016} = 2017$.
2. Se consideră ecuația $3z + 2i\bar{z} = 5(1+i)$. Să se calculeze $|z|$.
3. Să se determine coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = -2x^2 + 7$.
4. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația $2n - 8 = \frac{(n+1)!}{n!}$.
5. Să se determine valorile parametrului real m astfel încât distanța dintre punctele $A(1,m)$ și $B(2,0)$ să fie $\sqrt{3}$.
6. Să se calculeze $E = \sin x + \operatorname{tg} x$, știind că $\cos x = \frac{3}{2\sqrt{3}}$ și x este măsura unui unghi ascuțit.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 4x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze suma elementelor matricei $B \cdot A$.

b) Să se calculeze inversa matricei $A \cdot B$.

c) Să se determine x real astfel încât soluția ecuației $BX = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ să fie matricea C.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2^{x+y-1}$.

a) Să se calculeze $2017 \circ (-2017)$.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $x \circ x^2 = 32$.

c) Să se arate că legea de compoziție "$\circ$" nu este asociativă.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 2$.

a) Să se calculeze: $f(1) + f'(0) + f''(0)$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la grafic în punctul $A(0,-2)$.

c) Să se determine coordonatele punctului de inflexiune al graficului funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, x < 0 \\ e^x + 2, x \geq 0 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x) = f(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 02

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se determine numerele complexe z pentru care $|z|=1$ și $\mathrm{Re}(z)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx^2-mx+2, m\in\mathbb{R}^*$. Să se determine numărul real m știind că graficul funcției trece prin punctul $M(-2,4)$.
3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{(x-1)^2-x}=2$.
4. Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $2x^2-10x+1=0$.
5. Să se calculeze lungimea laturii $[BC]$ a triunghiului ABC știind că $AB=6$, $AC=10$ și $m(\sphericalangle BAC)=60^\circ$.
6. Să se verifice dacă $\arcsin\left(\frac{-1}{2}\right)+\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $A^2=2I_2$, unde $A^2=A\cdot A$.

b) Să se calculeze $\det\left(\sqrt{2015}\cdot I_2-A\right)$.

c) Să se rezolve în $M_2(\mathbb{R})$ ecuația $AX=X+A$.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $x\circ y=x+y-3$.

a) Să se arate că $1\circ(2\circ 3)=0$.

b) Să se găsească elementul neutru al legii de compoziție "$\circ$".

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $4^x\circ 4^x=1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+x$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că funcția $g:(-\infty,0)\to\mathbb{R}, g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ este descrescătoare.

2. Se consideră funcția $f:[2,3]\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{x^2-4}$.

a) Să se calculeze $\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)\cdot\sqrt{x^2-4}\,dx$.

b) Să se determine mulțimea primitivelor funcției f.

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției f.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 03

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se determine coordonatele punctelor de intersecţie ale graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-5$ cu axele de coordonate.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-5x+4$. Să se detemine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $f(x)\le 0$.
3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(2x+3)=2$.
4. Să se determine al şaselea termen al unei progresii aritmetice ştiind că $a_1=1$ şi $a_2=3$.
5. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $AC=5, BC=8$ şi $m(\hat{C})=30^0$.
6. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(1,2)$ şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie $2x-y+4=0$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}6 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se determine $\det(B-A)+\det(B)$.

b) Să se calculeze inversa matricei $C=B-A$.

c) Să se rezolve ecuaţia matriceală $XC=B$.

2. Fie legea de compoziţie pe $\mathbb{R}$, dată de $x*y=xy+6x+6y+30$.

a) Să se arate că $x*y=(x+6)(y+6)-6$.

b) Să se rezolve ecuaţia $x*(x-2)=-3$.

c) Să se determine elementul netru al legii de compoziţie "$*$" pe $\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x), \forall x\in(0,+\infty)$.

b) Să se arate că f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+4x+1$.

a) Să se aratce că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\frac{x^4}{4}+2x^2+x$ este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)-(4x+1)\,dx$.

c) Să se calculeze aria suprafeţei marginite de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=0$ şi $x=2$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 04

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Demonstrați că $a=\left(\sqrt{7}-3\right)\cdot\left(\sqrt{7}+3\right)-\sqrt[3]{-8}$ este număr natural.
2. Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile reale ale ecuației $x^2+5x+6=0$ să se calculeze $x_1+x_2-x_1x_2$.
3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\lg\left(x^2+9x\right)=1$.
4. Fie $A=\{0,2,4,6,8\}$. Aflați câte numere de 3 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii A.
5. Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x=\frac{2}{7}$. Să se calculeze $\cos x$.
6. Să se determine ecuația dreptei determinată de punctele $A(4,-2)$ și $B(3,2)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $A\cdot B=B\cdot A$. b) Să se arate că $(A-B)^3=A^3-B^3$.

c) Să se calculeze $(A+B)^n, n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinoamele cu coeficienți reali: $f=X^4+2X^3-4X^2-2X+1$ și $g=X\left(X^2-1\right)$.

a) Să se determine rădăcinile lui g.

b) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

c) Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile lui f calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\frac{x^2-1}{2x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}^*$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=2$.

c) Să se determine ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ a graficului funcției f.

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\cdot e^{2x}$, $f(x)=\left(4x^2+1\right)e^{2x}$.

a) Să se determine numerele reale a,b,c pentru care F este o primitivă a lui f.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)e^{-2x}dx$.

c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația, în jurula axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{4x^2+1}+e^{-2x}$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 05

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze $\log_6(3!)-\log_3 1-2\log_2\frac{1}{4}$.
2. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care este definită expresia $E(x)=\arcsin(2x-5)$.
3. Să se rezolve ecuaţia $\log_2 x+\log_2(x-1)=1, x\in\mathbb{R}$.
4. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât dreptele $d_1:-mx+y+5=0$ şi $d_2:-x+my+2=0$ să fie paralele.
5. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}=m\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\vec{v}=(2m-1)\vec{i}+3\vec{j}$ să fie coliniari.
6. Să se determine raza cercului circumscris triunghiului ABC, unde $AB=12, AC=20,\ BC=16$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}2x+my-3z=1\\x+y-z=2\\mx+2y+z=3\end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea sistemului să fie inversabilă.

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită soluţia $(2,1,1)$.

c) Pentru $m=1$ să se rezolve sistemul.

2. Fie $f\in\mathbb{Z}_5[X], f(X)=X^3+aX+\hat{2}$.

a) Pentru $a=\hat{0}$ să se rezolve ecuaţia $f(x)=\hat{2}, x\in\mathbb{Z}_5$.

b) Să se determine $a\in\mathbb{Z}_5$, ştiind că restul împărţirii polinomului f la $g=X+\hat{1}$ este $\hat{3}$.

c) Să se determine numărul elementelor mulţimii $G=\left\{f\in\mathbb{Z}_5[X]\,|\,f=X^3+aX+\hat{2}\text{ şi }f(\hat{3})=\hat{0}\right\}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{2x+m}{x^2-1}, x\le -2\\ x\cdot 2^x, x>-2\end{cases}$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$.

c) Să se calculeze $f'(0)+3f'(1)+f'(3)$.

2. Se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=x^n\sqrt{x^2+1}, n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze primitivele funcţiei f_1.

b) Să se calculeze $\int_0^1\frac{f_3^2(x)}{x^3}dx$.

c) Să se arate că $\int_0^1 f_n(x)dx\le\frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 06

SUBIECTUL I

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$. Să se determine f ştiind că $2f(x-1)-3f(2x+1)=4x-3, \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ ştiind că numerele $5-x, 2x+7, 3x+11$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $5\cdot 3^x=3\cdot 5^x$.

4. Fie ecuaţia $x^2+ax-2a=0$ cu $a\in\mathbb{R}$ şi soluţiile x_1, x_2. Arătaţi că expresia $2(x_1+x_2)-x_1x_2$ nu depinde de valorile parametrului a.

5. Dacă $\sin 70^\circ-\cos 70^\circ=a$ calculaţi $\sin 110^\circ+\cos 110^\circ-a$.

6. Să se calculeze $\log_2 18+\log_2 3-\log_2 27$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2^x & 1\\ 0 & 4^x\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2^x & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ ştiind că $\det(A)=64$.

b) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $A\cdot B^t=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

c) Pentru $x=1$ să se calculeze inversa matricei $(A-B)$.

2. Fie $M=(1,+\infty)$. Pe M definim legea de compoziţie $x\circ y=xy-x-y-2$.

a) Să se arate că $x\circ y=(x-1)(y-1)+1$.

b) Să se arate că $x\circ x\circ x=(x-1)^3+1$.

c) Să se rezolve ecuaţia $(\lg x)\circ(\lg x)\circ(\lg x)=2$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{3x-4}{x^2+1}$.

a) Să se calculeze f'.

b) Să se studieze monotonia funcţiei f.

c) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=(x^2+ax)\cdot f(x)$ admite asimptota $y=3x+5$.

2. Se consideră funcţiile $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x(2\ln x+1), g(x)=x^2\ln x$.

a) Să se demonstreze că funcţia g este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se arate că $\int_1^e f(x)g(x)dx=\dfrac{e^4}{2}$.

c) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 07

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Calculați produsul primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ știind că $b_2=3$.
2. Calculați $f(2)\cdot f(-2)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x+1}=8$.
4. Calculați probabilitatea ca alegând o submulțime cu trei elemente a mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$ această să îl conțină pe 3.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$ și $M(1,1)$. Determinați coordonatele punctului B știind că M este mijlocul segmentului $[AB]$.
6. Arătați că $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{7}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{3}{7}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\det(A)=-2$.

b) Arătați că $A\cdot A=2\cdot I_2$.

c) Determinați numărul real x, știind că matricea $B=A+xI_2$ este inversabilă.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+nX-2$, unde m și n sunt numere reale.

a) Calculați $f(1)+f(-1)$.

b) Dacă $m=-2$ și $n=4$ demonstrați că $x_1+x_2+x_3=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

c) Dacă restul împărțirii polinomului f la polinomul $X-3$ este egal cu restul împărțirii polinomului f la polinomul $X+1$, să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul $X-2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)e^x$.

a) Arătați că $f'(x)=x\cdot e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$ situat pe graficul funcției f.

c) Demonstrați că $-1\leq f(x)\leq e^2$, pentru orice $x\in[0,2]$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+4}{x}$..

a) Calculați $\int_1^3 x\cdot f(x)dx$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$.

c) Arătați că $\int_1^e f(x)\cdot \ln x\,dx=3$.

VARIANTA 08

SUBIECTUL I

1. Să se determine rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_2=5$ și $a_5=17$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-2$. Să se calculeze $f(f(1))$.

3. Să se rezolve ecuația $3^{x^2-5}=81$.

4. După o scumpire cu 10% prețul unui obiect este de 330 *lei*. Să se afle prețul obiectului înainte de scumpire.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1), B(1,2), C(5,4)$. Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC.

6. Să se calculeze $\cos x$ știind că $\sin x=\dfrac{24}{25}$ și x este măsura unui unghi ascuțit.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 6 & -3\end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $X(a)=I_2+aA, a\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $\det A$.

b) Să se arate că $A^2=-A$.

c) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\det X(a)=0$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X], f=X^3-4X^2+3X+2$.

a) Să se arate că f este divizibil cu $X-2$.

b) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2-X$.

c) Să se calculeze $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-\dfrac{2}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

b) Să se arate că f este strict crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

c) Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

a) Să se calculeze $\int_1^2 x\cdot f(x)\,dx$.

b) Să se arate că funcția $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\ln x$ este primitivă a funcției f.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se arate că aria suprafeței delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ este egală cu $\frac{3}{2}+\ln 2$.

VARIANTA 09

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Într-o progresie geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ avem $b_1=3$ și $b_3=12$. Să se determine b_5.
2. Să se determine numărul real m știind că $x^2+4x+m+6>0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5\cdot 9^x-8\cdot 15^x+3\cdot 25^x=0$.
4. Se consideră mulțimea $M=\{a,b,c,d,e\}$. Să se determine numărul de submultimi ale mulțimii A care conțin cel mult 3 elemente.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-3)$, $B(4,-3)$ și C(3,-5). Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta BC.
6. În triunghiul ABC avem $AB=2$, $AC=3$ și $BC=\sqrt{19}$. Să se arate că triunghiul ABC este obtuzunghic.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y-2z=4 \\ x+2y-z=3 \\ x-ay-z=1 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$ și matricea $X(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -a & -1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\det X(3)$.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea $X(a)$ să fie inversabilă.

c) Pentru $a=3$ să se rezolve sistemul.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție definită prin $x\circ y=xy-4x-ay+20$.

a) Pentru $a=4$ să se arate că legea de compoziție este asociativă.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ știind că elementul neutru este $e=5$.

c) Pentru $a=4$ să se rezolve în $\mathbb{Z}$ inecuația: $x\circ(x+2)\leq 4$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x-2}{e^x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că $f(x)\leq\frac{1}{e^3}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}, f_n(x)=\frac{1}{x^n+2}$.

a) Să se calculeze $\int (x+2)^2\cdot f_1(x)dx$, unde $x\in[0,1]$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 xf_2(x)dx$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se arate că $\int_0^1 f_{2013}(x)dx \in \left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$.

VARIANTA 10

SUBIECTUL I

1. Să se verifice dacă $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{2}$ este număr natural.

2. Să se calculeze $\log_5\frac{1}{5}+\log_5\frac{5}{8}+\log_5\frac{8}{13}+\log_5\frac{13}{19}+\log_5\frac{19}{25}$.

3. Știind că x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2-2014x+1007=0$, să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

4. Într-o progresie aritmetică $a_1=-14$ și $a_6=6$. Să se calculeze a_{508}.

5. Să se calculeze $\left(\sin^2 40^0+\cos^2 140^0\right)\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

6. Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că $AB=6\sqrt{2}, BC=8$ și $m\sphericalangle(ABC)=45^0$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}2mx+y+z=0\\x+my-z=-1\\x+2my+z=1\end{cases}$ unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine m real pentru care sistemul este de tip Cramer.

b) Să se determine m real pentru care $(0,-1,1)$ este soluție a sistemului.

c) Să se rezolve sistemul pentru $m=1$.

2. Pe mulțimea $G=(3,+\infty)$ se definește legea $x\circ x=xy-3x-3y+12, \forall x,y\in G$.

a) Să se arate că $x\circ y=(x-3)(y-3)+3, \forall x,y\in G$.

b) Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea dată.

c) Să se calculeze $U(G)$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, de forma $f(x)=\begin{cases}4x^3-3x^2, x\in(-\infty,1)\\a+\ln x, x\geq 1\end{cases}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care f este continuă în $x=1$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-a}{x}$.

c) Să se studieze monotonia funcției pe intervalul $(0,1)$ și să se precizeze punctele de extrem local.

2. Fie funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(x+1), F(x)=xe^x$.

a) Să se verifice dacă F este o primitivă a lui f.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)F(x)dx$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se calculeze aria suprafeței mărginite de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x=0, x=1$.

VARIANTA 11

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care numerele $x-2,\ x+3,\ 3x-2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Să se determine soluțiile întregi ale inecuației $4x^2-8x-5\le 0$.

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $\log_2(3x+1)-\log_2(x-3)=3$.

4. După o scumpire cu 10% prețul unui produs este de 660 lei. Să se determine prețul inițial al produsului.

5. Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(-1,2)$ și este paralelă cu dreapta de ecuație $3x-2y+6=0$.

6. Dacă $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ și $\sin x=\frac{4}{5}$ să se calculeze tgx.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul de ecuații $\begin{cases} mx-y+z=-1 \\ x+2y-z=2 \\ (m+1)x+2y+z=-2 \end{cases}$.

a) Să se calculeze $\det(A)$, unde A este matricea sistemului de ecuații.

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să aibă soluție unică.

c) Pentru $m=1$ să se rezolve sistemul.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X], f=X^3+mX-1,\ m\in\mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Pentru $m=1$, să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $f(x)=1$.

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$, știind că f este divizibil cu $X-2$.

c) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-1}{x+2}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

b) Să se determine asimptotele funcției.

c) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+x\ln x$ și $g(x)=2+\ln x$.

a) Să se arate că f este o primitivă a funcției g.

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)g(x)dx$.

c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g, axa Ox și dreptele de ecuație $x=1$, $x=e$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 12

SUBIECTUL I

1. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care este definită expresia $E(x) = \arccos(3-x)$.
2. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $\sqrt{x+16} = x-4$.
3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\lg(x+1) - 2\lg(x-1) = 1$
4. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element al mulţimii $\{2,3,4,5,6\}$ acesta să fie soluţie a ecuaţiei $C_n^2 + A_n^2 = 30$.
5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât dreptele $(d_1): 2x - y + 5 = 0$ şi $(d_2): mx - 3y + 7 = 0$ să fie perpendiculare.
6. Fie $A(1;0), B(2;-2), C(-1;3)$. Să se determine coordonatele vectorului $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră punctele $A_n(n;2n-1), O(0;0), B(-1;0)$.

a) Să se determine panta dreptei A_0A_1.

b) Să se calculeze aria triunghiului A_2A_3B.

c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât punctul $C(m,3)$ să aparţină dreptei: (A_0A_1).

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie internă $x * y = xy - 5x - 5y + 30, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x * y = (x-5)(y-5) + 5, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $5^x * 25^x = 5$.

c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, pentru care funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + m$, verifică egalitatea $f(x * y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$.

a) Să se arate că funcţia f este descrescătoare pe $(3,+\infty)$.

b) Să se determine asimptotele funcţiei f.

c) Să se calculeze panta dreptei (d), tangentă la graficul funcţiei f în punctul $T(1, f(1))$.

2. Fie funcţia $f: \mathbb{R} \setminus \{-3,-2\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^2+5x+6}$.

a) Să se arate că $f(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+3}$;

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Să se calculeze aria suprafeţei determinate de graficul funcţiei $h: [2,3] \to \mathbb{R}, h(x) = f(x) + \dfrac{1}{x+3}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x = 2, x = 3$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 13

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $[x-1]=-1$.
2. Să se calculeze al zecelea termen al șirului $1,8,15,22,\ldots$.
3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $8^x=4^{\frac{x}{2}+1}$.
4. Să se calculeze x^2+y^2 știind că x,y sunt soluțiile sistemului de ecuații $\begin{cases}2x+y=5\\3x+2y=8\end{cases}$.
5. Fie punctele $A(-2,1)$ și $B(1,-3)$. Să se determine numerele reale a și b astfel încât $\overrightarrow{AB}=a\vec{i}+b\vec{j}$.
6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=4, AC=5$ și $BC=6$. Să se calculeze $\cos B+\sin C$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&-1\\2&3&-1\end{pmatrix}$ și sistemul: $\begin{cases}x+3y+2z=-1\\2x+y-z=0\\2x+3y-z=1\end{cases}$.

a) Să se calculeze $\det(A)$.

b) Să se calculeze A^2.

c) Să se rezolve sistemul de ecuații.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{a+b\sqrt{7}\mid a,b\in\mathbb{Z}, a^2-7b^2=1\right\}$.

a) Să se demonstreze că $x\cdot y\in G$, pentru oricare $x,y\in G$.

b) Să se verifice dacă $8-3\sqrt{7}\in G$.

c) Să se arate că $(\forall)x\in G,(\exists)x'\in G$ astfel încât $x\cdot x'=1$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

a) Să se calculeze derivata funcției f.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Să se demonstreze că $f(x)\geq 4$ pentru orice $x>1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2-e^x, x\leq 0\\\sqrt{x}-1, x>0\end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{0} xf(x)\,dx$.

c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0;1]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 14

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze partea întreagă a numărului $\log_3 7 - \log_3 2$.
2. Să se afle cel mai mare element al mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid |1-2x| \leq 5\}$.
3. Să se rezolve ecuația $3^{x^2-2x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x-4}$.
4. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $r=-2$ și $a_5 = 2$.
5. Aria triunghiului echilateral ABC este $\sqrt{3}$. Știind că $A(x,1)$ și $B(-2,3)$, să se determine numărul real x.
6. Să se calculeze $\cos 135^0 - \sin\frac{11\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Fie matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ \frac{x}{2} & x-3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze $\det\left(A(1)+A(-2)\right)$.

b) Să se calculeze $\mathrm{Tr}\left(A^2(-3)+2I_2\right)$.

c) Să se rezolve ecuația matriceală $A(0)\cdot X = A(-2)$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - 6(x+y) + 42$.

a) Să se arate că $x \circ y = (x-6)(y-6)+6, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că mulțimea $M = (6,+\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$\circ$".

c) Să se determine elementele inversabile ale mulțimii M în raport cu legea "$\circ$".

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f:(2,\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \ln(x-2) + \frac{1}{x-2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$. b) Să se verifice că $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = 0$.

c) Să se studieze monotonia funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 4x^3-2x+1, x\in(-\infty,0) \\ e^x, x\in[0,+\infty) \end{cases}$.

a) Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$. c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \left(f(t)-1\right)dt$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 15

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_1=8$ şi $r=5$. Să se calculeze suma primilor 20 de termeni ai progresiei.
2. Să se determine maximul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+20$.
3. Să se arate că numărul $\left(\sqrt{8}+1\right)^2+\left(2\sqrt{2}-1\right)^2$ este natural.
4. Să se determine coordonatele punctului de intersecţie a diagonalelor AC şi BD ale paralelogramului $ABCD$, în care se cunosc punctele $A(3,2)$ şi $C(-1,3)$.
5. Să se determine probabilitatea ca la aruncarea unui zar, să apară o faţă al cărei număr e divizibil cu 3.
6. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi $M\in[AD]$, $N\in[BC]$ mijloacele laturilor. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-2\overrightarrow{MN}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră mulţimea de matrice $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 3a & a\end{pmatrix},\ a^2-3b^2=1,\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Să se verifice că $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in G$.

b) Să se arate că dacă $A,\ B\in G\Rightarrow AB\in G$.

c) Să se arate că dacă $X\in G,\ X=\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a\end{pmatrix}$, atunci X este matrice inversabilă şi $X^{-1}=\begin{pmatrix} a & -b \\ -3b & a\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-6X^2+1$, cu rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\in\mathbb{R}$.

a) Să se verifice că $f+8=\left(x-\sqrt{3}\right)^2\left(x+\sqrt{3}\right)^2$..

b) Să se calculeze $x_1+x_2+x_3+x_4$.

c) Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x^2+3x+3}$.

a) Să se demonstreze că $1-f(x)=\dfrac{6x}{x^2+3x+3}$.

b) Să se studieze existenţa asimptotei spre $+\infty$ şi spre $-\infty$.

c) Să se arate că are loc inegalitatea $f(x)\geq\dfrac{1}{13},\ \forall x\in[2,+\infty)$.

2. Fie funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se calculeze $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x+4} \right) dx$.

b) Să se calculeze aria suprafeţei determinate de graficul funcţiei f axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=1, x=3$.

c) Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R},\ h(x)=f(x)-\frac{1}{x+3}$.

VARIANTA 16

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Determinaţi numărul real x ştiind că $x-2, x, 8$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax-1$. Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ ştiind că punctul $A(a,3)$ aparţine graficului funcţiei f.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $3^{2x-1}+1=28$.

4. Calculaţi probabilitatea ca alegând un element din mulţimea numerelor naturale mai mici decât 100, acesta să fie pătrat perfect.

5. Fie dreapta de ecuaţie $d: ax+by-3=0$. Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ ştiind că punctele $A(1,1)$ şi $B(2,-1)$ aparţin dreptei d.

6. Se consideră triunghiul ABC în care $AB=5\sqrt{2}$, $m\left(\hat{B}\right)=45^0$ şi aria triunghiului egală cu 15. Aflaţi lungimea laturii $[BC]$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & x-2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

a) Calculaţi $\det(A+I_2)$.

b) Determinaţi $x\in\mathbb{R}$ ştiind că $\det(A^2-B)=0$.

c) Pentru $x=2$ aflaţi inversa matricei B.

2. Fie polinomul $f\in\mathbb{R}[X], f=2X^3-X^2+3$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Arătaţi că polinomul f este divizibil cu polinomul $g=X+1$.

b) Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la X^2-2.

c) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că: $a\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)=\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(x+2)\sqrt{x}$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}f(x)}{(2x-1)(3x+2)}$.

b) Arătaţi că $f'(x)=\frac{3x+2}{2\sqrt{x}}, x\in(0,+\infty)$.

c) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

a) Calculați $\int_1^2 xf(x)\,dx$.

b) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

c) Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe $[0,+\infty)$.

VARIANTA 17

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_5=3$. Determinați suma primilor 9 termeni ai progresiei.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-2$. Rezolvați inecuația $f(x)\geq f(-1)$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația $z+\dfrac{5}{z}=2$.

4. Numărul submulțimilor de 2 elemente ale unei mulțimi este egal cu 10. Determinați numărul submulțimilor ordonate de 3 elemente ale mulțimii.

5. Fie, într-un reper cartezian xOy, punctele $A(-2,1), B(1,3)$ și $C(3,-2)$. Determinați coordonatele punctului D știind că $ABCD$ este paralelogram.

6. În triunghiul ABC se dau: $m(\hat{A})=120^\circ, m(\hat{B})=30^\circ$ și $BC=5$. Calculați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}6 & 9\\ -4 & -6\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ în $M_2(\mathbb{R})$.

a) Demonstrați că $A^2=O_2$.

b) Demonstrați că inversa lui I_2-3A este I_2+3A.

c) Determinați $x\in\mathbb{Z}$ astfel încât $\det(2A-xI_2)=25$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x\circ y=xy-3x-3y+12, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $\forall x,y\in\mathbb{R}$ avem $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $(x-1)\circ(x+2)=7$.

c) Demonstrați că $(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ 3\circ 4>4\circ 2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+3x+6}{x+1}$.

a) Determinați asimptota oblică la graficul funcției f spre $+\infty$.

b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

c) Determinați punctele de abscisă $x_0\in\mathbb{R}$, în care tangenta la graficul funcției este

Scanned with OKEN Scanner

perpendiculară pe asimptota oblică.

2. Fie funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=(x^2+x+1)\cdot e^x$.

a) Determinați $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât F este primitiva lui f.

b) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x^2+3x+2)\cdot e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$.

c) Calculați $\int_0^1 \frac{e^x}{f(x)}dx$.

VARIANTA 18

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se determine al patrulea termen al unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=5$ și rația $r=2$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x-3$. Să se determine soluțiile reale ale inecuației $f(x)\geq 2x+7$.

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x-5)=2$.

4. Ecuația $x^2-3mx+5=0$ are soluțiile x_1 și x_2. Să se determine valorile reale ale lui m știind că $x_1+x_2=3x_1x_2$.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,-3), B(2,5)$. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$.

6. Să se calculeze $\sin^2 120^\circ+\cos^2 60^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că tripletul $(0,3,1)$ este soluție a sistemului pentru orice m număr real.

b) Să se determine valorile parametrului real m pentru care sistemul admite soluție unică.

c) Pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$ să se rezolve sistemul.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+3X^2+3X+1$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ și $g=x^2-3x+2$.

a) Să se arate că polinomul f este divizibil cu binomul $X+1$.

b) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

c) Să se calculeze produsul $S\cdot P$ unde $S=x_1+x_2+x_3$ și $P=x_1\cdot x_2\cdot x_3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+e^x$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f'(x)-f''(x)+f(x)=e^x-3$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+3$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$. b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x f(x)dx$.

c) Să se determine volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}, h(x)=f(x)$.

VARIANTA 19

SUBIECTUL I

1. Să se determine termenul al cincilea din şirul $1,7,13,\ldots$.

2. Să se determine modulul numărului complex $z=(1-i)^{10}$.

3. Să se rezolve ecuaţia $\log_3(4x+2)-\log_3(x+2)=1$.

4. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element n al mulţimii $A=\{-2,-1,3,4,5,6\}$, acesta să verifice inegalitatea $n(n-2)\le 8$.

5. Fie punctele $A(5,-1), B(-1,2), C(3,7)$. Să se scrie ecuatia medianei duse din vârful B.

6. Fie $a,b\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel ca $\sin a=\frac{3}{5}$ şi $\cos b=\frac{12}{13}$. Să se calculeze $\cos(a-b)$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases}2x+y-mz=3\\x-y+z=0\\3x+2y-3z=1\end{cases}$.

a) Să se determine valoarile parametrului real m pentru care matricea A asociată sistemului să fie inversabilă.

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A)=3$.

c) Pentru $m=-2$ să se rezolve sistemul de ecuaţii.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de conpoziţie $x*y=2x+3y-1$ şi $x\circ y=x+y+3$.

a) Să se calculeze $(1*2)\circ(2*1)$.

b) Să se rezolve ecuaţia $(x-1)*4=13$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţie $\begin{cases}(x*2)\circ(y*3)=1\\(2\circ x)*(3\circ y)=2\end{cases}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+3x^2+\frac{1}{3}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$.

b) Să se studieze concavitatea/ convexitatea funcţiei f.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $x_0=0$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^3}$.

a) Să se arate că $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}$.

b) Să se calculeze $\int_1^2 xf(x)\,dx$.

c) Să se determine aria suprafeţie plane cuprinse între graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=2$ şi $x=3$, dacă $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{x-2}{x^2}+f(x)$.

VARIANTA 20

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze $\log_2 8-\sqrt[3]{27}+2^{-2}$.
2. Să se determine numărul real x ştiind că $3x-2, 2x+3, 2x-5$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale, ecuaţia $2^{\sqrt{x}+1}=16$.
4. Să se determine câte submulţimi cu două elemente se pot forma cu elementele mulţimii $A=\{1,3,5,7,9\}$.
5. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele de ecuaţii $d_1: ax+y+2013=0$ şi $d_2: 12x+3y+2014=0$. Să se afle valorile parametrului real a pentru care dreptele d_1 şi d_2 sunt paralele.
6. Să se calculeze $\sin x$, ştiind că $\cos x=\dfrac{5}{13}$ şi $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră $m\in\mathbb{R}$ şi sistemul $\begin{cases} x+y+z=7 \\ 2x-y-z=5 \\ -x+2y+mz=4 \end{cases}$ şi $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & m \end{pmatrix}, m\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$, ştiind că matricea asociată sistemului este inversabilă.

b) Să se rezolve ecuaţia: $\begin{vmatrix} m^2-8m & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}=\det(A)$.

c) Pentru $m=3$, să se rezolve sistemul de ecuaţii.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-X+m\in\mathbb{R}[X]$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$, dacă $f(-3)=0$.

b) Pentru $m=-10$ să se arate că f se divide cu $X-2$.

c) Să se determine $m\in\mathbb{Q}$ pentru care polinomul f are rădăcina $\dfrac{-3+\sqrt{13}}{4}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

a) Să se scrie ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$.

b) Să se studieze monotonia funcţiei f pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se afle ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(3, f(3))$.

2. Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x+2014)e^x$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=(x+2013)e^x$.

a) Să se determine dacă F este o primitivă a lui f.

b) Să se determine volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $k:[0,1]\to\mathbb{R}, k(x)=\sqrt{\dfrac{F(x)}{x+2013}}$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)-F(x)}{\frac{1}{x}}dx$.

VARIANTA 21

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f:\left[0,\frac{3}{2}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\arccos\left(\frac{2x}{3}\right)$. Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)$.

2. Se dă ecuaţia $x^2-2mx+1=0$ cu soluţiile x_1 şi x_2 şi $m\in\mathbb{Z}$. Să se rezolve inecuaţia $2x_1^2-5x_1x_2+2x_2^2\le 0$, cu necunoscuta m.

3. Să se calculeze $\lg\frac{1}{2}-\lg\frac{3}{2}-\lg\frac{5}{2}+\lg\frac{3}{4}$.

4. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4), B(-3,-3), C(5,-1)$. Să se calculeze lungimea segmentului $[AM]$, unde M este mijlocul segmentului $[BC]$.

5. Să se calculeze $C_5^0+C_5^1+C_5^5$.

6. Să se calculeze $\sin x, x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, dacă $\cos x=-\frac{11}{12}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & a\\ -a & 4a\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze $\det(A)$.

b) Să se determine a pentru care matricea A este inversabilă.

c) Pentru $a=1$ să se determine inversa matricei A.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+2aX^2+(a-2)X-2\in\mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $x_1+x_2+x_3=-2$.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că f este divizibil cu polinomul $X+1$.

c) Pentru $a=1$, să se determine $S=x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x}{x-1}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se determine asimptotele funcției f.

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^{2014}+2014^x$.

a) Să se determine $\int f(x)\,dx$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 xf\left(x^2\right)dx$.

c) Să se arate că orice primitivă a funcției f este o funcție crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$.

VARIANTA 22

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Arătați că numărul $2\left(2-7\sqrt{3}\right)+14\sqrt{3}$ este număr natural.

2. Calculați $m=A_4^2+C_5^3+3!$

3. Rezolvați, în mulțimea $\mathbb{R}$, ecuația $\sqrt{x^2-5x+7}=1$.

4. Suma de 2000 de lei a fost depusă la o bancă cu o rată a dobânzii simple de 6% pe an. Calculați suma rezultată după o perioadă de 2 ani.

5. În reperul cartezian se dau punctele $A(1,2), B(3,4)$ și $C(-1,0)$. Scrieți ecuația medianei din C în triunghiul ABC.

6. Știind că $\cos x=\frac{2}{5}, x\in\left(0^0,90^0\right)$, calculați $\sin x$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se dau matricele $A,B\in M_2(\mathbb{R}), A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det(A+B)$.

b) Arătați că $A^2+5I_2=O_2$.

c) Rezolvați ecuația $X\cdot A=B$.

2. Se consideră polinomul $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3-5X+6$ și $g=X-2$.

a) Scrieți sub formă algebrică polinomul $h=f\cdot g$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii lui f la g.

c) Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se dă funcția $f:\mathbb{R}/\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin^2 x}$.

b) Arătați că funcția f este crescătoare pe $(2,+\infty)$.

c) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$, la graficul funcției f.

2. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+3, x\geq 1\\ 3x^2+1, x<1\end{cases}$.

a) Arătați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Calculaţi $\int_0^2 f(x)\,dx$.

c) Calculaţi volumul corpului generat prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei f pe intervalul $[1,3]$.

VARIANTA 23

SUBIECTUL I

1. Să se arate că $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}(\log_2 8-1)\in\mathbb{N}$.

2. Să se arate că vârful parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+6$ are coordonatele egale.

3. Fie $(a_n), n\in\mathbb{N}$ o progresie aritmetică cu $a_4=1$ şi $a_9=11$. Să se calculeze al cincilea termen al progresiei.

4. O persoană depune la bancă 1200 *lei*. Ce sumă va primi persoana după un an ştiind că rata dobânzii este de 6%?

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3), B(3,4)$ şi $C(4,2m+3), m\in\mathbb{R}$. Determinaţi m ştiind că B este mijlocul segmentului $[AC]$.

6. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $AC=4\sqrt{2}, BC=2$ şi $m(\hat{C})=45^0$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră determinantul $D(x)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 9\\ 1 & x & x^2\end{vmatrix}, x\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $D(2)$.

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D(x)=0$.

c) Să se arate că ecuaţia $D(2^x)=0$ are două soluţii reale distincte.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-aX^2-aX+1$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că restul împărţirii polinomului f la $(X-2)$ este 3.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că $x_1+x_2+x_3=3x_1x_2x_3$.

c) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că polinomul f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(2,5)$.

c) Să se scrie ecuaţia asimptotei către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_m=(2m-4)x^3+mx^2+6x+2, m\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei f_0.

b) Să se calculeze $\int_1^3 \frac{f_2(x)}{x}dx$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se determine numărul real $m, m \geq 2$, știind că aria suprafeței determinate de graficul funcției $f_m(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ este 9.

VARIANTA 24

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x)=2x+2$ și $g(x)=2-x$. Să se verifice egalitatea $f(x+1)-f(1)+g(2x)-g(0)=0$.

2. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avem $a_1=2$ și $a_{29}=-54$. Aflați rația r și termenul a_{12}.

3. Să se rezolve ecuația $2^{x+1}+2^{x+2}=24$ în mulțimea numerelor reale.

4. Să se calculeze: $\log_5 \frac{1}{2}+\log_5 \frac{2}{3}+\log_5 \frac{3}{4}+\log_5 \frac{4}{25}$.

5. Să se arate că $\frac{(\sin x+\cos x)^2}{1+2\sin x\cos x}=1$ unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

6. Fie punctele $A(x,y)$ și $B(-2,6)$. Să se determine $x, y\in\mathbb{R}$ astfel încât $M(2,4)$ să fie mijlocul segmentului $[AB]$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+1 & -x \\ -x & 2 \end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $A(1)\cdot A(-1)$.

b) Să se rezolve ecuația $\det(A)=2+x^2, x\in\mathbb{R}$.

c) Să se arate că $A(x-1)+A(x+1)=2A(x), x\in\mathbb{R}$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=xy-5x-5y+30$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $10*20$.

b) Să se determine elementul neutru al legii date.

c) Să se rezolve ecuația $2^x*2^{x+1}=2^{2x+1}, \forall x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ dată prin legea de corespondență $f(x)=\frac{x^2+16}{x}$.

a) Să se arate că $f'(x)=\frac{x^2-16}{x^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}^*$.

b) Să se determine ecuația asimptotei oblice la $+\infty$.

c) Să se afle coordonatele punctelor de extrem ale funcției.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de legea de corespondență $f(x)=9-x^2$.

a) Să se calculeze $\int xf(x)dx$.

b) Să se calculeze aria suprafeței mărginite de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=-3$ și $x=3$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se calculeze volumul corpului generat prin rotirea graficului funcției $g:[-3,3]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$ în jurul axei Ox.

VARIANTA 25

SUBIECTUL I

1. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(m+1)x^2+2x-3$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției să intersecteze axa Ox în două puncte.

2. Să se rezolve ecuația: $4^{\sqrt{2x-3}}=64$.

3. Să se calculeze suma: $1+13+25+...+121$.

4. Să se calculeze probabilitatea că alegând un element din mulțimea $\{0,1,2,...50\}$ acesta să fie divizibil cu 5.

5. Să se determine $m\in\mathbb{Z}$ astfel încât vectorii $\vec{a}=(2m+1)\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{b}=m\vec{i}+\vec{j}$ să fie perpendiculari.

6. Să se calculeze $\cos x$ știind că $\sin x=\frac{4}{5}, x\in(90^\circ;180^\circ)$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea de forma $M_x=\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & -1\end{pmatrix}; x\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $\det(M_0+M_1)$.

b) Să se verifice dacă $M_x^2=I_2$ unde $M_x^2=M_x\cdot M_x$.

c) Să se rezolve ecuația: $x^2\cdot\det(M_x)-4\det({}^tM_x)=0$ unde ${}^tM_x$ este transpusa matricii M_x.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție: $x\circ y=3xy-6x-6y+14$.

a) Să se arate că $x\circ y=3(x-2)(y-2)+2, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se rezolve ecuația $x\circ x=5$.

c) Știind că legea "$\circ$" este asociativă să se calculeze $(-2013)\circ(-2012)\circ...\circ(-1)\circ 0\circ(1)\circ...\circ\circ(2012)\circ(2013)$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2e^x-x^2+2x+1$.

a) Să se arate că $f'(x)=2(e^x-x+1)$.

b) Să se arate că f este convexă pe $[0;+\infty)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)-2e^x}{x^2+1}$.

2. Fie funcțiile $f,F:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1$ și $F(x)=x\ln x-2\sqrt{x}$.

a) Să se arate că F este o primitivă a lui f.

b) Să se arate că $\int_1^e\left(F(x)+2\sqrt{x}\right)dx=\frac{1}{4}(e^2+1)$

c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dr de

Scanned with OKEN Scanner

ecuaţii $x=1$ şi $x=4$.

VARIANTA 26

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se calculeze $\log_5 10+\log_5 3-\log_5 6$.
2. Ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-2x-4=0$ să se calculeze $2(x_1+x_2)-x_1x_2$.
3. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{2x-3}=5$.
4. După o reducere cu 15% un produs costă 170 lei. Să se determine preţul produsului înainte de reducere.
5. Să se determine numărul real a, ştiind că vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+(a+3)\vec{j}$ şi $\vec{v}=5\vec{i}+(2a+1)\vec{j}$ sunt coliniari.
6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC ştiind că $AB=10\sqrt{2}$ şi $m\measuredangle(C)=135^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+2z=-1 \\ x-y+(m-2)z=2 \end{cases}$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât soluţia sistemului să fie $(3,-1,-1)$.

b) Să se determine valorile parametrului real m, pentru care sistemul admite soluţie unică.

c) Pentru $m=4$, să se rezolve sistemul.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră legea $x*y=xy-x-y+2$.

a) Să se arate că $x*y=(x-1)(y-1)+1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$, ecuaţia $x*x=5$.

c) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie "$*$".

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+2}{x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}^*$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} e^x+1, & x\le 0 \\ \sqrt{x}+2, & x>0 \end{cases}$.

a) Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{0} xf(x)\,dx$.

c) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox, a graficului funcţiei

Scanned with OKEN Scanner

$g:[1,4]\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)$.

VARIANTA 27

SUBIECTUL I

1. Să se arate că numărul $a=|6-8i|-|1+i\sqrt{3}|$ este număr natural.
2. Să se arate că $a=5^{\log_5 3}+\log_{\sqrt{3}} 9$ este număr natural.
3. Să se determine x știind că numerele $x^2+1, 4x+2$ și $4x^2-1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
4. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația $\frac{2^1\cdot 2^3\cdot 2^5\cdot\ldots\cdot 2^{2n-1}}{2^2\cdot 2^4\cdot 2^6\cdot\ldots\cdot 2^{2n}}=4^{-1}$.
5. Fie $A(-2;1), B(3;5)$ și $C(1;-3)$. Să se determine coordonatele vectorului $5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$..
6. Să se calculeze $\cos x$, știind că $\sin\frac{x}{2}=\frac{7}{8}$ și $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x+2y-z=7 \\ 2x-y+3z=-6 \\ -3x+4y+mz=19 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine m astfel încât sistemul să admită soluție unică.
b) Pentru $m=-7$, să se arate că tripletul $(-1-p,4+p,p)$ este soluție a sistemului.
c) Pentru $m=-1$, să se rezolve sistemul.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=x^{\ln y}$.

a) Să se calculeze $5\circ e^2$.
b) Să se verifice că numărul e este element neutru.
c) Să se arate că legea de compoziție este comutativă.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{x}$.

a) Să se arate că $f'(x)=\frac{2}{x^2+1}-\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$.
b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x=\sqrt{e-1}$.
c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:(-1;+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$.

a) Să se arate că $F:(-1;+\infty)\to\mathbb{R}$ dată prin $F(x)=x\sqrt{x+1}$ este o primitivă a funcției f.
b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe intervalul $\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)$.
c) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=3$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 28

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se calculeze $\log_2\left(3-\sqrt{2}\right)+\log_2\left(3+\sqrt{2}\right)-\log_2 7$.
2. Să se calculeze $C_3^0+C_4^2+C_4^4$.
3. Să se calculeze $x_1^2+x_2^2$ știind că x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-4x=1$.
4. Să se calculeze aria triunghiului ABC dacă $BC=2\sqrt{2}$, $AC=2$, $m\left(\hat{B}\right)=45^\circ$.
5. Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(-1,1), B(2,-3)$.
6. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x+xy+y=9 \\ x-xy+y=1 \end{cases}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei C, unde $C=A+B$.

b) Să se verifice că $A^2=2A$ și $B^2=4B$.

c) Să se demonstreze că $(A+B)^3=2^2\cdot A+4^2\cdot B$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-7(x+y)+56,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se verifice că $x\circ y=(x-7)(y-7)+7$ pentru $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că $G=(7,+\infty)$ este parte stabilă în raport cu legea de compoziție "$\circ$".

c) Să se determine elementul neutru al legii "$\circ$".

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2013}\right)<f\left(\sqrt[3]{2014}\right)$.

c) Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră $f:\mathbb{R}\setminus\{-1;-2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}$.

a) Să se calculeze $f(x)-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=3$.

c) Să se calculeze volumul obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-\dfrac{1}{x+2}$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 29

SUBIECTUL I

1. Să se verifice că $2\left(\sqrt{12}\cdot i+3\right)-4\sqrt{3}\cdot i=6$.

2. Să se calculeze $f(5)\cdot f\left(\sqrt{6}\right)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-6}{x^2+1}$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2-4}=\dfrac{1}{27}$.

4. Preţul unui obiect este 250 *lei*. Să se determine preţul obiectului după o scumpire cu 20%.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,5), N(8,3), P(2m+1,4)$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că punctul P este mijlocul segmentului $[MN]$.

6. Să se calculeze $\text{tg}A$, ştiind că $\sin A=\dfrac{4}{5}$ şi unghiul A este obtuz.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -4 & -3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}3-m & -5\\ m-1 & 3\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\det A$.
b) Pentru $m=5$ să se calculeze $A\cdot B$.
c) Să se afle $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $A+B=O_2$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+2x+2y+2$.

a) Să se calculeze $(-2)\circ 1$.
b) Să se resolve ecuaţia $5\circ x=-2$.
c) Să se resolve sistemul $\begin{cases}x\circ 1=y\\ y\circ(-1)=7x\end{cases}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-3x^2+mx+2$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care $f'(1)=0$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{5x^2}$.

c) Dacă $m=3$, să se verifice că f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$.

a) Să se calculeze $\int_2^4\left[f(x)-\dfrac{1}{x^2}\right]dx$.

b) Să se arate că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{x}+5$ este o primitivă a funcţiei f.

c) Să se calculeze aria suprafeţei delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=3$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 30

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ inecuaţia $-2x^2+5x+7>0$.
2. Să se determine soluţiile pozitive ale ecuaţiei $\log_3(4x-1)-\log_3 x(2x-1)=1$.
3. Două produse costă împreună 252 *lei*. Să se determine preţul fiecărui produs ştiind că dacă primul preţ se măreşte cu 10% se obţine preţul celui de al doilea produs.
4. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr de trei cifre, scris cu cifre din mulţimea $\{1,4\}$, acesta să fie divizibil cu 4.
5. Să se determine valorile reale ale lui a pentru care vectorii $\vec{u}=(a-2)\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{v}=-2\vec{i}-(1+a)\vec{j}$ sunt ortogonali.
6. Să se calculeze aria triunghiului ABC, cu $AB=3\,cm, BC=8\,cm$ şi $m(\widehat{ABC})=30^0$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & 1-x & 2\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze $A(2)\cdot A(-1)$.

b) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A(x))=0$.

c) Să se determine inversa matricei $A(0)$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}[X]$ se definesc polinoamele $f=X^2-5X+a-2$ şi $g=X^4+2X^3-3$.

a) Pentru ce valori reale ale lui a, polinomul f admite rădăcina $x_0=1$?

b) Să se verifice dacă pentru $a=6$ polinomul f divide polinomul g.

c) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul $h=3g+10xf$ are rădăcină dublă $x=1$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln x-\sqrt{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\ln x-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+1, \forall x\in(0,\infty)$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$.

c) Să se determine dacă graficul funcţiei f admite asimptote verticale.

2. Se consideră integralele $I_n=\int_0^1(x^n+1)e^x dx, n\in\mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_0.

b) Să se arate că $I_2-I_1=e-3$.

c) Să se demonstreze că $I_{n+1}-I_n\le 0, \forall n\in\mathbb{N}$

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 31

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze $\frac{5!-3!}{A_3^2}$.

2. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, în care se cunosc $a_1=1$ şi $a_5=13$. Să se calculeze suma primilor zece termeni ai progresiei.

3. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$. Să se determine numerele reale a şi b pentru care graficul funcţiei conţine punctele $A(-1,2)$ şi $B(0,-3)$.

4. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element n al mulţimii $\{1,2,3,4,5\}$ acesta să verifice inegalitatea: $2^n\geq n^2$.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ şi $B(3,-2)$. Să se calculeze simetricul punctului B faţă de punctul A.

6. Se consideră triunghiul MNP în care $MN=8, MP=8$ şi $m(\widehat{M})=30^0$. Să se calculeze aria triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se determine matricea $B\in M_2(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $A=B+4I_2$.

b) Să se calculeze $\det(A^2-B^2)$.

c) Să se arate că $A^{-1}=-B$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=2xy+4x+4y+6, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x\circ y=2(x+2)(y+2)-2, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x\circ x\circ x=2$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abscisă $x_0=2$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x-3$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 f^2(x)\,dx$. b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

c) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $h:[1,2]\to\mathbb{R}, h(x)=\frac{f(x^2)}{x}$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 32

SUBIECTUL I

1. Să se determine al patrulea termen al unei progresii geometrice $(b_n), n \geq 1$, știind că primul termen este 2, iar al doilea este 6.
2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 + 2mx + 6m - 8 = 0$ verifică relația $x_1 + x_2 = x_1 x_2$.
3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + mx + 3$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, pentru care dreapta $y = x + 1$ este tangentă parabolei $y = f(x)$.
4. Să se rezolve, în $\mathbb{R}$, ecuația $5^x - \frac{1}{625} = 0$.
5. După o scumpire cu 15%, un produs costă 414 *lei*. Care este prețul inițial.
6. Să se determine numărul real m pentru care punctul $A(5,3)$ se află pe dreapta $d : x + 3y - m = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

1. În mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(t) = tA + I_2, t \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze A^2 și să se verifice relația $A^{20} = -A$.

b) Să se demonstreze că $M(t) \cdot M(v) = M(t + v - t \cdot v)$, oricare ar fi $t, v \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze suma $M(1) + M(2) + ... + M(2014)$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = x + y + n, n \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine n știind că $e = 4$ este element neutru al legii „$*$”.

b) Pentru $n = -4$, să se arate că legea „$*$” este asociativă.

c) Să se rezolve ecuația $(x^2 + 2x) * x = 0$, pentru $n = -4$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - e^{-x}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

b) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $S_n = f'(x) + f'(2) + ... + f'(2014) + f''(1) + f''(2) + ... + f''(2014)$.

2. Se consideră funcțiile: $f, F : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(x+2)}, F(x) = \frac{1}{2}\left[\ln x - \ln(x+2)\right]$.

a) Să se verifice dacă funcția F este primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x) \cdot F(x) dx$.

c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x = 1$ și $x = 3$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 33

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Se consideră numărul complex $z=2+i$. Determinați partea reală a numărului z^2.

2. Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b,\ a\neq 0$, știind că $f(1)=3$ și $f(0)=2$.

3. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{x^2-5x+3}=-1$.

4. După o scumpire cu 10% un obiect costă 594 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de scumpire.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4), B(1,1)$ și $C(3,-1)$. Scrieți ecuația medianei duse din vârful A al triunghiului ABC.

6. Calculați perimetrul triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $tgB=\frac{3}{4}$ și $AC=9$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ și $B\begin{pmatrix}a & b\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

a) Calculați $\det(A)$.

b) Determinați numerele reale a și b știind că $A\cdot B=B\cdot A$.

c) Arătați că inversa matricei A este matricea $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinoamele $f=X^3-6X^2+9X-2$ și $g=X-2$.

a) Să se arate că polinomul f este divizibil cu polinomul g.

b) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ știind că $f=(X-2)(X^2+aX+b)$.

c) Să se calculeze $\frac{x_1}{x_2\cdot x_3}+\frac{x_2}{x_1\cdot x_3}+\frac{x_3}{x_1\cdot x_2}$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2}{x-3}$.

a) Să se verifice dacă $f'(x)=\frac{x(x-6)}{(x-3)^2}$, pentru orice $x>3$.

b) Scrieți ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+2}{x}$..

a) Arătați că $\int_1^2 x\cdot f(x)dx=\frac{7}{2}$.

b) Determinați primitiva $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1)=2$.

c) Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției $g:[1,e]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(f(x)-1)\ln x$ și axa Ox.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 34

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se arate că $\left(-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)^2-\left(25-12\sqrt{6}\right)$ este număr natural.
2. Să se determine valoarea maximă a funcției $f:[-2,3]\to\mathbb{R}, f(x)=-3x+4$.
3. Să se determine valorile parametrului real m știind că ecuația $x^2+(m-2)x+1=0$ are soluții egale.
4. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\cos\pi;\cos\frac{\pi}{6};\cos\frac{2\pi}{3};\cos\frac{3\pi}{4}\right\}$ acesta să fie rațional.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,-1), B(5,1)$. Să se determine coordonatele simetricului punctului A față de B.
6. Triunhiul ABC are $A=\frac{\pi}{6}$ și $B=\frac{2\pi}{3}$. Să se demonstreze că $AC=\sqrt{3}\cdot BC$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} mx-2y+z=1 \\ 2x-my-3z=3, \text{ unde } m\in\mathbb{R}. \\ x-y+2z=4 \end{cases}$

a) Să se arate că suma elementelor de pe diagonala principală a matricei sistemului este egală cu 2.

b) Să se determine valorile reale ale lui m pentru care matricea sistemului este inversabilă.

c) Pentru $m=1$, să se arate că $y_0^2=x_0\cdot z_0$, unde (x_0,y_0,z_0) este soluția sistemului.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+mX+1$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $m=0$, să se calculeze restul împărțirii polinomului f la $X-1$.

b) Să se arate că polinomul f este divizibil cu $X+1$, $\forall m\in\mathbb{R}$.

c) Să se determine valorile reale ale lui m pentru care polinomul f are trei rădăcini reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2+2}$.

a) Să se arate că $f'(x)=\frac{10x}{\left(x^2+2\right)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că $-\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{1}{3}$, $\forall x\in[0,1]$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+1}\,dx$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se arate că $I_n+I_{n+1}=\frac{1}{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

c) . Să se arate că $\frac{1}{4026} \le I_{2012} \le \frac{1}{2013}$.

VARIANTA 35

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze $\log_2 8 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \sqrt[3]{8}$.
2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\log_3|5-2x|$. Să se calculeze $f(-3)\cdot f(-2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot\ldots\cdot f(3)$.
3. Să se rezolve ecuaţia $2^{x^2-4x+2}=4$.
4. Câte echipe a câte 8 elevi se pot forma dintr-un grup de 10 elevi?
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1;2), B(-2;-2), C(5;-1)$. Să se demonstreze că triunghiul ABC este isoscel.
6. Să se calculeze $\operatorname{tg} x$, ştiind că $\sin x=\frac{3}{5}$ şi $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-2y+(2m-1)z=2 \\ 2x-y+3z=0 \\ mx-y+3z=n \end{cases}$, unde $m,n\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine valorile parametrilor reali m şi n, astfel încât tripletul $(-1;1;1)$ să fie soluţie a sistemului.

b) Să se determine valorile parametrului real m pentru care sistemul admite soluţie unică.

c) Pentru $m=1$ şi $n=0$, să se rezolve sistemul.

2. Fie polinomul $f\in\mathbb{R}[X], f=3X^3+mX^2-4X+3$.

a) Să se determine parametrul m astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $X+1$.

b) Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

c) Pentru $m=-4$, să se determine rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=x+\sin x$.

a) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $[0,2\pi]$.

b) Să se calculeze $L=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$..

c) Să se verifice egalitatea: $\left(f'(x)\right)^2+\left(f''(x)\right)^2=2f'(x), x\in[0,2\pi]$.

2. Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=x^n e^x, \forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}$.

a) Să se determine primitivele funcţiei f_0.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f_2, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=0$ şi $x=1$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se determine volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=\left(f_0(x)+f_1(x)\right)\cdot e^{-x}$

VARIANTA 36

SUBIECTUL I

1. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1=2$ şi $a_3=12$. Să se calculeze a_{20}.
2. Să se calculeze $f(1)\cdot f(-1)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-2x^2+3$.
3. Să se calculeze $C_6^3+C_5^3$.
4. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{2x-1}=125$.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,3)$ şi $B(2,-3)$. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$.
6. Să se calculeze $\cos 60^0+\cos 120^0$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}, n\in\mathbb{N}$.

a) Să se calculeze determinantul matriciei A.

b) Să se verifice egalitatea $A(n)\cdot A(m)=A(n+m)$.

c) Să se determine matricele $B=\begin{pmatrix}m & m\\ m & 5\end{pmatrix}$, dacă $\det\left(B+A(3)\right)=0$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=-xy-x-y-2, x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $5*(-2)$.

b) Să se arate că legea „$*$” este comutativă.

c) Să se rezolve ecuaţia $x*x=-17$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=8x^2-\ln x$.

a) Să se arate că $x\cdot f'(x)=16x^2-1$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$

b) Să se arate că funcţia este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

c) Să se arate că $f(x)-\frac{1}{2}\geq 2\ln 2$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{2x}{x^2+1}$.

a) Să se calculeze $\int_{-1}^{2}\left(f(x)+\frac{2x^3}{x^2+1}\right)dx$.

b) Să se verifice că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\frac{x^2}{2}+\ln\left(x^2+1\right)$, este o primitivă a funcţiei f.

c) Să se calculeze aria suprafeţei delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=1$ şi $x=2$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 37

SUBIECTUL I

1. Să se determine coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+4x-5$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-4$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+...+f(10)$.
3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(10-x)=2$.
4. Să se rezolve ecuaţia $A_{2n-3}^2=20, n\in\mathbb{N}, n\geq 3$.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2), B(5,2), C(3,-1)$. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.
6. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea $A=\left\{\sin 30^0, \sin 120^0, \sqrt{2}\cdot\cos 45^0, \operatorname{tg}60^0, \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\operatorname{tg}30^0\right\}$ acesta să fie număr raţional.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră mulţimea $G=\{A_x \mid x\in\mathbb{Z}\}$, unde $A_x=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x&0&1\end{pmatrix}, x\in\mathbb{Z}$.

a) Să se verifice că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, pentru oricare $x,y\in\mathbb{Z}$.

b) Să se arate că G este grup faţă de înmulţirea matricelor.

c) Să se demonstreze că funcţia $f:\mathbb{Z}\to G, f(x)=A_x$ este morfism între grupurile $(\mathbb{Z},+)$ şi $(G,\cdot)$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X], f=\left(1+X+X^2\right)^2$ şi $g=X^2-1$.

a) Să se scrie f sub formă algebrică.

b) Dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile polinomului g, să se calculeze $f(x_1)+f(x_2)$.

c) Să se determine restul împărţirii polinomului f la polinomul g.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+3x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$.

a) Să se arate că $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$. b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 38

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Demonstraţi că numărul $\left(4-\sqrt{2}\right)^2+\left(4+\sqrt{2}\right)^2$ este pătrat perfect.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+(m-2)x+4$. Determinaţi parametrul real m ştiind că graficul funcţiei nu intersectează axa Ox.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2-5x}=729$.
4. O persoană depune la o bancă suma de 1 200 lei. Ştiind că după 3 luni primeşte înapoi suma de 1 215 lei, determinaţi rata dobânzii.
5. În reperul cartezian xOy, se consideră punctele $A(2,-3)$ şi $B(1,-4)$. Determinaţi coordonatele simetricului punctului A faţă de punctul B.
6. Se consideră triunghiul ABC cu $BC=12\text{cm}$ şi raza cercului circumscris triunghiului egală cu 9 cm. Calculaţi $\sin A$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul: $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=2 \\ -3x+(2a-1)z=1 \end{cases}$, unde $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2a-1 \end{pmatrix}$ este matricea asociată sistemului şi a un parametrul real.

a) Determinaţi parametrul real a astfel încât matricea A să fie inversabilă.

b) Aflaţi valoarea parametrului real a ştiind că $\det(A)=a^2+12$.

c) Pentru $a=0$, rezolvaţi sistemul.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy-8x-8y+72$ şi mulţimea $H=(8,\infty)$.

a) Arătaţi că $x\circ y=(x-8)(y-8)+8$ oricare ar fi x,y numere reale.

b) Demonstraţi că dacă $x,y\in H$ atunci $x\circ y\in H$.

c) Ştiind că legea de compoziţie "$\circ$" este asociativă, calculaţi: $1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2017$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=5\ln x+\frac{10}{x}$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(1,10)$.

c) Arătaţi că $f(x)\geq 5\ln(2e)$ oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

2. Se consideră funcţiile $f,F:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x+\frac{2}{x}-3, F(x)=(x+2)\ln x-4x+3$.

a) Arătaţi că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

b) Calculaţi $\int_1^e f(x)\,dx$.

c) Demonstraţi că $\int_1^2 f(x)\cdot F(x)\,dx=\frac{(4\cdot\ln 2-5)^2-1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 39

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Se consideră şirul $3,7,11,15,...$ de numere reale care este o progresie aritmetică. Să se determine termenul cu rangul 15.

2. Să se determine partea reală a numărului complex $\left(1+i\sqrt{3}\right)\cdot\left(1-i\sqrt{3}\right)$.

3. Determinaţi soluţiile reale ale ecuaţiei $4^{3x+2}=\frac{1}{64}$.

4. Un obiect costă 480 de lei. Cât va costa obiectul după două luni, dacă după o lună se ieftineşte cu 25% şi după încă o lună se scumpeşte cu 25%.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-2,3)$. Să se determine ecuaţia unei drepte perpendiculare pe dreapta d de ecuaţie $-2x+y-7=0$ şi care conţine punctul A.

6. Fie triunghiul ABC cu $AB=6, AC=8$ şi $BC=10$. Aflaţi distanţa de la vârful A al triunghiul ABC la latura BC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

a) Calculaţi A^2+I_3.

b) Arătaţi că matricea I_3+A este inversa matricei I_3-A.

c) Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A-mI_3)=-8$.

2. Fie polinomul $f=X^3+2mX^2-3X+1$, unde m este un număr real şi x_1,x_2x_3 rădăcinile polinomului.

a) Pentru $m=\frac{1}{2}$ aflaţi rădăcinile polinomului.

b) Determinaţi valoarea lui m pentru care restul împărţirii lui f la $X+1$ este 1.

c) Pentru $m=1$, calculaţi $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x+3, & x<0\\ \frac{1}{x+1}+2, & x\geq 0\end{cases}$.

a) Studiaţi continuitatea funcţiei f în punctul $x_0=0$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A\left(1,\frac{5}{2}\right)$.

c) Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare pe $[0,+\infty)$.

2. Fie funcţiile $f_m:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=2mx^2-3(m-1)x+4$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $\int f_3(x)dx$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x \cdot f_0(x)dx$.

c) Să se determine m, astfel încât $\int_0^1 f_m(x)dx = 4$.

VARIANTA 40

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Numerele reale x şi y verifică $2^x = 5$ şi $5^y = 2$. Să se calculeze $x \cdot y$.
2. Graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-1$ intersectează axele de coordonate în punctele A şi B. Să se calculeze lungimea segmentului $[AB]$.
3. Să se rezolve ecuaţia: $\frac{1}{2^x} = 4^{-1}$.
4. Să se determine câte numere de două cifre au ambele cifre nenule şi pare.
5. Fie $A(1,2)$, $B(-1,5)$ şi O originea sistemului de coordonate. Aflaţi coordonatele punctului M, ştiind că $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}$.
6. Un triunghi ABC cu laturile $AB=3+\sqrt{3}$, $AC=3-\sqrt{3}$ şi $BC=2\sqrt{6}$. Să se arate că $m(\hat{A})=90^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1\\ -2 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2.

b) Să se verifice că I_2+2A este inversa matricei I_2-2A.

c) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A-xI_2)=4$.

2. Fie $(\mathbb{Z}_8,+,\cdot)$ inelul claselor de resturi modulo 8 şi $H=\{x^3 / x\in\mathbb{Z}_8\}$.

a) Să se rezolve ecuaţia $\hat{2}x+\hat{5}=\hat{1}$, $x\in\mathbb{Z}_8$.

b) Să se determine suma elementelor mulţimii H.

c) Să se rezolve ecuaţia $x^3=\hat{3}$, $x\in\mathbb{Z}_8$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{9^x-1}{3^x}$.

a) Să se arate că funcţia f nu are puncte de extrem.

b) Să se determine numerele reale a şi b pentru care $\frac{f''(x)}{f(x)}=ax+b$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$.

c) Să se calculeze $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le 0\\ x^2+e^x+2, & x>0\end{cases}$.

a) Să se calculeze $\int f(x)dx,\ x\in(0,\infty)$.

b) Fie F o primitivă a lui f cu $F(-2)=0$. Să se calculeze $F(1)$.

c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g:[-1,0]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$, în jurul axei Ox.

VARIANTA 41

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze: $\log_8 6\cdot\log_6 2-C_5^2+\log_{27}9$.

2. Să se determine imaginea funcției: $f:[-1,5]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-5x+4$.

3. Să se rezolve ecuația: $\sqrt{x-4}=2x-8$.

4. Câte numere naturale, cu cel puțin două cifre distincte, se pot forma folosind doar cifre care sunt numere prime?

5. Punctele $A(1,2), B(-1,3), C(a,a+1)$ determină un triunghi a cărui arie este15. Determinați a.

6. Să se calculeze cosinusul celui mai mare unghi al unui triunghi ABC, în care $AB=4, AC=8,\ BC=7$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se considere matricele: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Să se determine $\det(A+B)-\det(A)$.

b) Să se calculeze inversa matricei $A+B$.

c) Să se calculeze $AB-BA$.

2. Fie polinomul $f=X^4-(a+1)X^3+aX^2+(2a-1)X-3, a\in\mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1,x_2,x_3,x_4.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care resturile împărțirii polinomului f la $x+1$ și $x-1$ sunt egale.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=5$.

c) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)=6$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se dă funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+2x^{-1}$.

a) Să se calculeze derivata întâi a funcției.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

c) Să se studieze monotonia funcției date.

2. Se dau funcțiile: $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(x^2+1), g(x)=e^x(x+1)^2$.

a) Să se verifice dacă f este primitiva lui g.

b) Să se calculeze: $\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $h:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\sqrt{g(x)}$ în jurul axei Ox.

VARIANTA 42

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se calculeze $\dfrac{P_5-5A_5^2}{C_5^2}$.

2. Să se determine al 10-lea termen al unei progresii aritmetice cu rația negativă, știind că $a_3=3$ și $a_2a_4=5$.

3. Să se scrie ecuația de gradul al II-lea cu coeficienți reali care are soluțiile $x_1=1-\sqrt{2}$ și $x_2=1+\sqrt{2}$.

4. Să se determine parametrul real a pentru care vectorii $\vec{v_1}=a\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ și $\vec{v_2}=2\vec{i}+a\vec{j}$ sunt perpendiculari.

5. Să se rezolve triunghiul ABC știind că $m(\sphericalangle C)=60^\circ$, $m(\sphericalangle B)=75^\circ$ și $AB=4cm$.

6. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care dreptele de ecuații $y=2x+3$ și $y=mx-3$ sunt perpendiculare.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&5\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&4\end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $A^2-7B=O_2$.

b) Să se rezolve ecuația $\det(A-xI_2)=-3$ în mulțimea $\mathbb{R}$.

c) Să se rezolve ecuația matriceală $AX=B$.

2. Fie legea de compoziție $x*y=xy-10x-10y+110,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x*y=(x-10)(y-10)+10,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se rezolve ecuația $(a-1)*(a-1)=10$.

c) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție "$*$".

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcțiile $f,g:D\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{\dfrac{2x-1}{2x+1}}, g(x)=f^2(x)$.

a) Să se stabilească domeniul de definiție al funcției f.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ a funcției g.

c) Să se stabilească monotonia funcției g.

2. Fie funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(2x^2-3)e^x$, $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$.

a) Să se determine numerele reale a,b,c pentru care F este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f și dreptele de ecuații $x=-1, x=1$, știind că $a=2$, $b=-4$, $c=1$.

c) Să se calculeze volumul corpului de rotație generat de funcția $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)e^{-x}$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 43

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-25$. Să se determine $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(2010)\cdot f(2014)$.
2. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element al mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ acesta să verifice inegalitatea $n!<n^2+4$.
3. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei: $\log_5(2x-7)=1$.
4. Să se determine valorile reale ale parametrului m, astfel încât ecuaţia $mx^2+(m-3)x+2-m^2=0$ să aibă două soluţii reale, inverse una alteia.
5. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(4,7), B(7,4)$.
6. Să se determine aria triunghiului ABC ştiind că $AB=4, AC=6$ şi $BC=8$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 6 & 5\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze matricea A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

b) Să se arate că $B^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -4\\ -6 & 5\end{pmatrix}$.

c) Să se calculeze matricea C^2, unde $C=A^2+B^{-1}-3I_2$ şi $C^2=C\cdot C$.

2. Se consideră mulţimea $G=\left\{a+b\sqrt{15}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-15b^2=1\right\}$.

a) Să se verifice dacă 0 şi $4+\sqrt{15}$ aparţin mulţimii G.

b) Să se arate că mulţimea G este parte stabilă în raport cu înmulţirea numerelor reale.

c) Să se arate că în raport cu înmulţirea numerelor reale, orice element din mulţimea G are invers în multimea G.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-4\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+9}{x+4}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4\}$.

b) Să se studieze monotonia funcţiei f.

c) Să se demonstreze că $\dfrac{f(x)}{2}\geq 1$, $\forall x\in(-4,+\infty)$.

2. Se consideră funcţiile $f,F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x}$ şi $F(x)=x^2-\ln x$.

a) Să se arate că F este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze $\int_1^2 F(x)f(x)dx$.

c) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei F, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 44

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Calculați $z+\frac{1}{z}$ pentru $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Determinați $m\in\mathbb{R}$, pentru care valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^2+2x+m$ este egală cu $\frac{2017}{2}$.
3. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația $3^x+9^x=2$.
4. Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=56$.
5. Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1,-2)$ și face cu axa Ox un unghi cu măsurile de 45°.
6. Calculați $E=\frac{\sin^2 40^\circ+\cos^2 140^\circ}{\cos^2 40^\circ+\sin^2 140^\circ}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & a+2 & 1\end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}$.

a) Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A)=0$.

b) Arătați că punctele $M(3,0)$, $N(1,2)$, $P(-1,a+2)$ sunt coliniare dacă și numai dacă $a=2$.

c) Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care aria triunghiului MNP este egală cu 3.

2. Se dă polinomul $f\in\mathbb{C}[X], f=X^3-4X^2-X+m$ cu rădăcinile x_1,x_2,x_3.

a) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2-1$.

b) Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $x_1^3+x_2^3+x_3^3=4\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+x_1+x_2+x_3-12$.

c) Rezolvați ecuația $f(x)=0$, pentru $m=4$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(2x-3)e^{x^2}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{\sin x}$.

b) Determinați intervalele de monotonie pentru funcția f.

c) Arătați că $f(x)\geq -e,\ \forall x\in[1,+\infty)$.

2. Se dau funcțiile $f,F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x^2+1}{x}$, $F(x)=x^2+m\ln x$, $m\in\mathbb{R}$.

a) Determinați m pentru care F este primitivă pentru funcția f.

Scanned with OKEN Scanner

b) Calculaţi aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei F, axa Ox şi dreptele $x=1, x=e$ pentru $m=1$.

c) Determinaţi m pentru care $\int_1^m f(x)dx = m^2+e-1$.

VARIANTA 45

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se calculeze $C_7^3 - A_6^2$.
2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia $x^2+x>12$.
3. Să se rezolve ecuaţia $4^x - 3\cdot 2^x + 2 = 0$.
4. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x-4$. Să se calculeze $f\left(1+\sqrt{2}\right)+f\left(1-\sqrt{2}\right)$.
5. Să se scrie ecuaţia dreptei d care conţine punctul $A(1,3)$ şi are panta 2.
6. Să se calculeze $\sin^2 2014^\circ + \cos^2 2374^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În mulţimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $X(a)=a\cdot A+I_2$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se arate că $A^2=3A$.

c) Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(3ab+a+b), (\forall)a,b\in\mathbb{R}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x\circ y=-x-y+\sqrt{5}$.

a) Să se verifice dacă este adevărată egalitatea: $\left(2\circ\sqrt{5}\right)\circ 1 = 2\circ\left(\sqrt{5}\circ 1\right)$.

b) Să se determine numărul real e pentru care $x\circ e = e\circ x = -x, (\forall)x\in\mathbb{R}$.

c) Să se rezolve ecuaţia $2^x\circ 4^x = -6+\sqrt{5}, x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Considerăm funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Să se arate că f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$.

c) Să se arate că f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+3$.

a) Să se arate că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+2014$ este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze $\int_1^3 (x-2)f^2(x)dx$.

c) Să se determine aria suprafeţei mărginite de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele $x=0, x=1$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 46

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se arate că numărul $N=\sqrt{2015+2\sqrt{2014}}-\sqrt{2015-2\sqrt{2014}}$ este natural.
2. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt[3]{3-2x}=3$.
3. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ avem $a_1=2(a_2-2)$. Să se determine a_3.
4. Să se rezolve ecuaţia $\log_2(x^2+1)=\log_2 5\cdot\log_5 2$.
5. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(0,1), B(1,0)$.
6. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC ştiind că $BC=16$ şi $\cos A=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B=(3\quad 2\quad 1)$, $A\in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $B\in M_{1,3}(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze $A\cdot B$.

b) Să se arate că matricea $C=A\cdot B$, $C\in M_3(\mathbb{R})$ nu este inversabilă.

c) Să se arate că ecuaţia $A\cdot X=I_3$, $X\in M_3(\mathbb{R})$, nu are soluţii.

2. Se consideră legea de compoziţie pe $\mathbb{R}$, dată de $x\circ y=ax+y+1$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că $(a-1)\circ(a-1)=1$.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$, pentru care legea admite element neutru.

c) Să se determine simetricul lui 1.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2014^x+x^{2014}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$.

c) Să se determine ecuaţia tangentei în origine la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-xe^x, & x\leq 0\\ x^2, & x>0\end{cases}$.

a) Să se arate că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

c) Să se arate că orice primitivă F a funcţiei f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 47

SUBIECTUL I

1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_3=5$ şi $a_6=11$. Să se calculeze a_{2014}.
2. Să se determine coordonatele punctelor de intersecţie ale graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x+6$ cu axa Ox.
3. Să se rezolve ecuaţia $6^{1-x}=36^x$.
4. Să se determine câte submulţimi ordonate cu două elemente are mulţimea $A=\{1,2,3,4,5\}$.
5. Punctele $A(2,-1)$ şi $B(1,m)$ determină o dreaptă paralelă cu dreapta de ecuaţie $x+3y-5=0$. Să se determine numărul real m.
6. Să se calculeze $\sin x$, ştiind că $\cos x=\frac{2}{3}$ şi $x\in(0^\circ,90^\circ)$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $3\cdot A(2)-4\cdot A(-1)$.

b) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\left[A(x)\right]^2=I_2$.

c) Să se arate că $\left[A(x)\right]^2=2x\cdot A(x)+(1-x^2)\cdot I_2, x\in\mathbb{R}$.

2. Fie polinomul $f=X^3+mX^2+mX+m-4$, unde m este un număr real şi x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile sale.

a) Să se determine valorile reale ale lui m pentru care polinomul f se divide cu polinomul $X-1$.

b) Să se determine valorile reale ale lui m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=11$.

c) Pentru $m=1$ să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{e^x+x}{x^2+1}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$. b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de pe grafic de abscisă $x_0=0$.

2. Se consideră integralele $I_n=\int_2^4\frac{x^n}{x^2-1}dx, n\in\mathbb{N}$.

a) Să se arate că $I_0=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$. b) Să se calculeze I_1.

c) Să se demonstreze că $I_{n+2}-I_n=\frac{4^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 48

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze suma primilor cinci termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_2=-1$ şi $a_4=0$.

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi inecuaţia $\left|\frac{2x-1}{2}\right|\leq 1$.

3. Să se determine $m\in\mathbb{N}$ astfel încât axa de simetrie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(m^2-1)x^2+3x+2$ să fie dreapta de ecuaţie $x=-\frac{1}{2}$.

4. Să se determine probabilitatea ca alegând un element din mulţimea $A=\left\{\sqrt[3]{1},\sqrt[3]{3},\sqrt[3]{5},...,\sqrt[3]{31}\right\}$, acesta să fie raţional.

5. Să se calculeze aria triunghiului ABC în care $AB=6, AC=7\sqrt{2}, m(\widehat{A})=45^0$.

6. Să se calculeze $\cos^2 80^0+\sin^2 100^0$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}-1 & x-1\\ x & -1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

a) Să se determine matricele $A(0)+A(3)$ şi $A(1)\cdot A(-1)$.

b) Să se verifice că $A^2+2A+(\det A)\cdot I_2=O_2$.

c) Să se calculeze $A(1)+A(3)+...+A(99)$.

2. Pe mulţimea $G=(-\infty,1)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=-3xy+3x+3y-2$, $(\forall)x,y\in G$.

a) Să se arate că $x*y=-3(x-1)(y-1)+1, (\forall)x,y\in G$.

b) Să se rezolve ecuaţia $x*x=-2, x\in G$.

c) Să se studieze existenţa elementului neutru al legii "$*$" definită pe mulţimea G.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abscisă 1.

2. Se consideră $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}, f_n(x)=x\sqrt{x^n+1}, n\in\mathbb{N}$.

a) Să se determine primitiva $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ a funcţiei f_0, care verifică relaţia $F(1)=2$.

b) Să se calculeze $\int_1^2\frac{(f_1(x))^2}{x^4}dx$.

c) Să se determine $n\in\mathbb{N}$ astfel încât volumul corpului obţinut prin rotirea subgraficului funcţiei f_n în jurul axei Ox să fie egal cu $\frac{\pi}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 49

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se calculeze $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(m-1)x+2$. Să se determine valorile reale ale parametrului m pentru care funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

3. Să se rezolve ecuația $\sqrt{2^x-1}=1$.

4. După o scumpire cu 10% prețul unui dicționar este 110 lei. Care a fost prețul inițial al dicționarului.

5. Fie punctele $A(2,3)$ și $B(4,-1)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$.

6. Să se calculeze aria triunghiului ABC dacă $AB=4, AC=5$ iar măsura unghiului A este de 150°.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}2x-3y+z=-9\\ x+z=-1\\ y-2z=0\end{cases}$.

a) Să se scrie matricea asociată sistemului.
b) Să se demonstreze că matricea asociată sistemului este inversabilă.
c) Să se rezolve sistemul.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=xy+3x+3y+6$.

a) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.
b) Să se determine elementul neutru al acestei legi de compoziție.
c) Să se determine $u=(-2013)*(-2012)*...*2013*2014$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1-e^x}{1+e^x}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.
b) Să se determine asimptotele graficului funcției.
c) Să se arate că $-1\le f(x)\le 1, \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x+1, \text{ dacă } x\le 0\\ x^2+2x+1, \text{ dacă } x>0\end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe mulțimea de definiție.

b) Să se determine o primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f cu proprietatea $F(1)=\frac{1}{3}$.

c) Să se calculeze aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$, $x=1$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 50

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-3$ cu axele de coordonate.
2. Să se determine valorile reale ale numărului m pentru care ecuația $m^2x+3m-x=m^2+2$ are soluția $x=5$.
3. Să se rezolve ecuația $\log_3(5x-1)=2$.
4. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$, al cărei grafic este dreapta AB, unde $A(-1,7)$ și $B(2,4)$.
5. Să se determine coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC, cu vârfurile $A(3,-2)$, $B(2,-3)$ și $C(-14,8)$.
6. Să se calculeze aria triunghiului ABC, știind că $AB=BC=4$ și $m(\widehat{ABC})=60^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -6 & 4\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\det(A+B)$.

b) Să se determine inversa matricei C, unde $C=A+B$.

c) Să se demonstreze că $A^2=A$, unde $A^2=A\cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+x+y$.

a) Să se demonstreze că $x*y=(x+1)(y+1)-1, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $(x^2-2)*3=4$.

c) Știind că legea "$*$" este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei :
$E=(-2014)*(-2013)*\ldots*(2013)*(2014)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x+2}$.

a) Să se determine ecuația asimptotei oblice la graficul funcției spre $+\infty$.

b) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

c) Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

2. Se consider funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=x-\dfrac{1}{x}$.

a) Să se calculeze $\int f(x)dx$. b) Să se calculeze $\int_2^4\left(f(x)+\dfrac{1}{x}\right)dx$.

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 51

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze $125^{\frac{1}{3}}-\log_2 32+\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$.
2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+2x+3$. Să se arate că graficul funcţiei nu intersectează axa Ox.
3. Să se rezolve ecuaţia $3^{x^2-4x+8}=9^x$.
4. Câte numere de trei cifre distincte se pot forma utilizând doar cifre impare?
5. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că punctul $A(2,2)$ aparţine dreptei de ecuaţie $-3x+my+4=0$.
6. Se consideră triunghiul ABC cu aria egală cu 6, $AB=3$ şi $BC=8$. Să se calculeze $\sin B$.

SUBIECTUL al II-lea

1. În mulţimea $\mathcal{M}_3\in\mathbb{R}$ se consideră matricile $A=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

a) Să se determine matricea B din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A=B+I_3$.

b) Să se determine inversa matricii A.

c) Să se determine A^3, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie prin $x\circ y=-3xy+6x+6y-10$, oricare ar fi numerele reale x şi y.

a) Să se calculeze $(x\circ y)+3(x-2)(y-2)$.

b) Să se determine simetricul elementului $a=3$ în raport cu legea de compoziţie.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x\circ x=-1$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}e^x-3x, x<0\\ \sqrt{x}+1, x\geq 0\end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcţiei f în punctul $x_0=0$.

b) Să se verifice dacă graficul funcţiei f admite asimptotă către $+\infty$.

c) Să se arate că funcţia f este convexă pe $(-\infty,0)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2-\frac{2}{x}$.

a) Să se calculeze $\int_1^2\left(f(x)+\frac{2}{x}\right)dx$.

b) Să se determine volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $h:[2,3]\to\mathbb{R}, h(x)=f(x)$.

c) Să se calculeze $\int_1^e f(x)\cdot\ln x\,dx$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 52

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Determinați numărul complex z pentru care $3z+2\bar{z}=5-7i$.
2. Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+px+q$ știind că parabola asociată are vârful $V(3,4)$.
3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_3(5x+1)-\log_3(x-3)=2$.
4. Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,0\}$. Determinați câte numere de 4 cifre distincte din mulțimea A se pot forma.
5. Se dă triunghiul ABC cu vârfurile $A(4,-1)$, $B(1,2)$ și $C(3,6)$. Scrieți ecuația înălțimii din A în triunghiul ABC.
6. Se consideră vectorii $\vec{a}=3\vec{i}-5\vec{j}$ și $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}$. Arătați că unghiul format de cei doi vectori este obtuz.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x-y+z=-1 \\ 2x+y+3z=2 \\ x+2y+mz=1 \end{cases}$ și A matricea asociată.

a) Calculați pentru $m=0$, matricea $B=A^2+2A+I_3$.

b) Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care A este matrice inversabilă.

c) Rezolvați sistemul pentru $m=3$.

2. Se dă polinomul $f\in\mathbb{C}[X], f=X^3-2X^2+aX+b,\ a,b\in\mathbb{R}$.

a) Determinați valorile lui a,b pentru care f are rădăcini pe $x_1=1$ și $x_2=2$.

b) Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul f se divide cu polinomul $g=X^2-X+3$.

c) Dacă $a=4$ și $b=-3$, iar x_1,x_2,x_3 rădăcinile lui f, calculați $S=x_1^3+x_2^3+x_3^3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2x^2}{x-3}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{2x+6}$.

b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Arătați că $24\le f(x)\le 32, \forall x\in[4,9]$.

2. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+x$.

a) Arătați că orice primitivă F a funcției f este funcție convexă pe $\mathbb{R}$.

b) Calculați volumul corpului generat prin rotația graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$, în jurul axei Ox.

c) Calculați $\int_0^1 \dfrac{1}{f'(x)}dx$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 53

SUBIECTUL I

1. Să se verifice că $\left(2\sqrt{5}-1\right)^2+4\sqrt{5}\in\mathbb{N}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2-x+2$. Să se calculeze $f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)$.

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $3^{x+6}=\frac{1}{9^x}$.

4. După scumpirea cu 10%, preţul unui produs devine 660 *lei*. Să se calculeze preţul iniţial al produsului.

5. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că punctul $A(3a,-5)$ aparţine dreptei $(d):4x-3y+9=0$.

6. Să se calculeze $\operatorname{tg}^2 30^\circ+\operatorname{ctg}^2 60^\circ-\sin^2 135^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

1. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A_n\left(2n-2,n^2-n\right)$.

a) Să se determine $n\in\mathbb{N}$ pentru care punctele A_n au coordonatele egale.

b) Să se scrie ecuaţia dreptei (A_2A_3).

c) Să se calculeze aria triunghiului $A_1A_2A_3$.

2. Se consideră polinoamele $f,g,h\in\mathbb{R}[X], f=X^3+aX^2+X+b, a,b\in\mathbb{R}, g=X-1$ şi $h=X+2$.

a) Pentru $a=b=1$ să se determine rădăcinile reale ale lui f.

b) Să se determine a şi b dacă resturile împărţirii lui f la g, respectiv h sunt 2 şi -1.

c) Dacă $a=-2$ şi $b=0$ să se determine rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se verifice dacă $\lim\limits_{x\to\infty}x^2f'(x)=-2$.

c) Să se determine ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^2\cdot f(x)$.

2. Fie $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+3+\frac{1}{3-x}$.

a) Să se calculeze $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{3-x}\right)dx$.

b) Să se arate că orice primitivă F a funcţiei f este strict crescătoare pe $[0,2]$.

c) Să se determine aria suprafeţei plane determinate de graficul funcţiei f şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 54

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$, pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(m+3)x+1$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.
2. Calculaţi suma $S=1+12+23++34+...+122$.
3. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{1-2x}=5$.
4. După o reducere cu 15% preţul unui obiect este de 255 lei. Aflaţi preţul iniţial al obiectului.
5. Se consideră vectorii $\vec{a}=3m\vec{i}+4\vec{j}$ şi $\vec{b}=m\vec{i}-3\vec{j}$. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii sunt ortogonali.
6. Calculaţi $m=\left(\sin^2 20^0+\sin^2 70^0\right)\left(\cos^2 20^0+\cos^2 70^0\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $m\in\mathbb{R}$ şi sistemul de ecuaţie $(S)=\begin{cases}mx+y-2z=4\\x+2y-z=3\\x-my-z=1\end{cases}$ şi A matricea sistemului.

a) Calculaţi $\det(A(-1))$.

b) Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care matricea A admite inversă.

c) Rezolvaţi sistemul (S) pentru $m=1$.

2. Se consideră polinoameule $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3-2X^2+aX+b, g=X^2+X-2$.

a) Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ ştiind că polinomul g este divizor al polinomului f.

b) Dacă $a=-1, b=2$ rezolvaţi ecuaţia $f(x)=0$.

c) Pentru $a=1$, determinaţi $b\in\mathbb{R}$, astfel încât $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{10}$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se dă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{3x^2-2}{x^2+1}$.

a) Calculaţi $f'\left(\sqrt{2}\right)$.

b) Determinaţi punctele de extrem pentru funcţia f.

c) Arătaţi că dacă $x\in[0,2]$, atunci $|f(x)|\le 2$.

2. Se dau funcţiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1+6x^2}{x}$ şi $g(x)=3x^2+\ln x$.

a) Arătaţi că funcţia g este o primitivă pentru funcţia f.

b) Calculaţi $I=\int_1^e f(x)\cdot g(x)\,dx$.

c) Calculaţi aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 55

SUBIECTUL I

1. Să se demonstreze că numărul $a=\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{18}$ este natural.

2. Prețul unui obiect este de 100 *lei*. Acest se mărește cu 20%, iar după o perioada se micșorează cu 20%. Să se afle cu cât a crescut sau a scăzut prețul final al obiectului.

3. Să se rezolve ecuația $\log_7\left(5-x^2\right)=0$.

4. Să se determine al zecelea termen al unei progresii aritmetice știind că $a_1=2$ și $a_2=6$.

5. Să se calculeze aria triunghiului ABC, știind că $AB=AC=12$ și $m\left(\widehat{A}\right)=30^0$.

6. Să se calculeze $\sin 135^0-\cos 45^0$.

SUBIECTUL al II-lea

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3), B(-1,-3)$ și $C(2,m+1), m\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că punctele A, B și O sunt coliniare.

b) Să se scrie ecuația dreptei AB.

c) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât aria tringhiului ABC să fie egală cu 4.

2. Se consideră polinomul $f=2X^3+aX^2-2X-1$ care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ știind că una dintre rădăcinile polinomului este $x=-1$.

b) Pentru $a=1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

c) Să se determine $a\in(0,+\infty)$ dacă $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)\left(x_1+x_2+x_3\right)=a^2-2$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{x+2}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\frac{2}{(x+2)^2}$, pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale la $+\infty$ pentru funcția f.

c) Să se studieze monotonia funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{2}{x}, \text{pentru } x\le -2\\ \sqrt{x+2}, \text{pentru } x>-2\end{cases}$

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx$.

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[-2,0]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 56

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se calculeze $2\left(\sqrt{5}+4\right)-2\sqrt{5}$.
2. Să se rezolve ecuaţia $(x+3)^2-x^2-5x=14$.
3. Un produs costă $1500lei$. Să se calculeze preţul produsului după o ieftinire cu 20%.
4. Să se rezolve ecuaţia $3^{x^2-2x}=27$.
5. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ ştiind că punctul $M(2a+3,b-2)$ este mijlocului segmentului $[AB]$, unde $A(-1,1)$ şi $B(3,3)$.
6. Să se determine perimetrul triunghiului ABC în care $AB=5$, $AC=8$, $m(\hat{A})=30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se dau matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

b) Să se calculeze $\det(A+I_2)$.

c) Să se determine inversa matricei A.

2. Fie polinomul $f\in\mathbb{R}[X], f=X^3-3X^2+X+1$.

a) Să se calculeze $f(1)$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la $X-1$.

c) Să se calculeze $x_1^3+x_2^3+x_3^3$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x\left(x^2+2x+2\right)$.

a) Să se determine $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Să se demonstreze că f este crescătoare pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Fie $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$ şi $F(x)=x^2+x-2$.

a) Să se verifice că F este o primitivă a lui f.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\cdot F(x)dx$.

c) Să se calculeze aria suprafeţei plane determinate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=2$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 57

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se ordoneze descrescător numerele $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}, \log_3 27, C_4^2$.

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale inecuația: $-3(1-x) \leq 5-x$.

3. Să se determine termenul al treilea a_3 și suma primilor 20 de termeni ai unei progresii geometrice cu rația 2 și $a_2 = -1$.

4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $4^{x+2} = 8$.

5. Să se calculeze $\sin(120^\circ) + \cos(210^\circ)$.

6. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $M(-2,1)$ și este paralelă cu dreapta $(d): 6x + 10y - 1 = 0$..

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ și submulțimea

$G = \{X(a) = I_2 + aA \,/\, a \in \mathbb{R}\}$.

a) Să se verifice că $A^2 = -A$.

b) Să se verifice că I_2 aparține mulțimii G.

c) Să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(a+b-ab), \forall a, b \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră mulțimea $M = \{f \in \mathbb{Z}_3[X] \,|\, f = x^2 + ax + b\}$.

a) Pentru $a = \hat{2}$ și $b = \hat{1}$ să se calculeze $f(\hat{1})$.

b) Să se determine polinomul din mulțimea M, astfel ca $f(\hat{0}) = \hat{1}$ și $f(\hat{1}) = \hat{2}$.

c) Să se determine numărul elementelor mulțimii M.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

a) Să se verifice egalitatea $f'(x) = 2\left(x - \frac{1}{x^2}\right), x \in \mathbb{R}^*$.

b) Să se calcueze $\lim\limits_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2}$.

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consider funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+5, \text{ dacă } x \leq -1 \\ 3x^2 + 1, \text{ dacă } x > -1 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive. b) Să se calculeze $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția $g:[-2,-1]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$, obținut prin rotirea graficului în jurul axei Ox.

VARIANTA 58

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se arate că numărul $4\left(\sqrt{5}-2\right)+\left(2-\sqrt{5}\right)^2$ este întreg.
2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$. Să se rezolve ecuația $f\left(x^2+1\right)-3f(x)=1$.
3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale $\log_2(x+2)=-1$.
4. Să se calculeze $C_5^4+A_4^3+P_3$.
5. Fie $A(-2,3), B(1,-1)$. Să se determine numerele reale a,b astfel încât $\overrightarrow{AB}=(a+1)\vec{i}+(b-2)\vec{j}$.
6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=6, AC=8$ și $BC=10$. Să se calculeze $\cos B$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie mulțimea $A=\left\{x=a+b\sqrt{2}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z}, a^2-2b^2=1\right\}$.

a) Să se arate că $3+2\sqrt{2}\in A$ și $\left(3+2\sqrt{2}\right)^2\in A$.

b) Să se demonstreze că $xy\in A, \forall x,y\in A$

c) Să se demonstreze că mulțimea A conține cel puțin 2014 elemente.

2. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f=X^3+(a-2)X^2-5X+4$, unde $a\in\mathbb{R}$ cu rădăcinile x_1, x_2 și x_3.

a) Să se determine numărul real a astfel încât $x_1+x_2+x_3=0$.

b) Pentru $a=2$ să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

c) Pentru $a=3$ să se calculeze $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln x}{x+2}$.

a) Să se calculeze $f'(1)$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$.

c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale la $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x+2^{-x}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-2^{-x}$.

c) Să se arate că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $(-\infty,0)$ și convexă pe $(0,\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 59

SUBIECTUL I

1. Să se determine media aritmetică şi media geometrică a numerelor $x=2\sqrt{5}+3$ şi $y=2\sqrt{5}-3$.

2. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că valoarea minimă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+2x-m^2$ este egală cu -2.

3. Să se rezolve ecuaţia $\log_3\left(x^2+2\right)-\log_3 x=1$.

4. Să se calculeze TVA-ul unui produs, ştiind că preţul de vânzare al produsului este 558 lei.(procentul TVA-ului se consideră de 24%)

5. Să se determine ecuaţia dreptei care conţine punctul $A(1,1)$ şi este paralelă cu drepta $x+y+1=0$.

6. Să se calculeze $\sin^2 75^\circ+\cos^2 105^\circ$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră în reperul cartezian xOy punctele $A_n\left(n,n^2\right)$, cu $n\in\mathbb{Z}$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei A_2A_4.

b) Să se determine aria suprafeţei triunghiulare $\left(A_1A_2A_3\right)$.

c) Să se demonstreze că punctele A_n, A_{n+1} şi A_{n+2} nu pot fi coliniare pentru orice n număr întreg.

2. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy-2x-2y+6$.

a) Să se demonstreze că $x\circ y=(x-2)(y-2)+2$, oricare ar fi $x,\ y\in\mathbb{Z}$.

b) Să se afle elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziţie "$\circ$".

c) Să se calculeze $2^{2011}\circ 2^{2010}\circ\ldots\circ 2^2\circ 2^1\circ 2^0$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţiile $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+x)-x$ şi $g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$.

a) Să se verifice că $xf'(x)+g'(x)=0,\forall x\in(-1,+\infty)$.

b) Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$.

c) Să se arate că $f(x)<0<g(x),\ \forall\ x>0$.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2011x^{2010}}{x^{2011}+1}$.

a) Să se verifice că funcţia $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=\ln\left(x^{2011}+1\right)$ este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se arate că $F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\geq F\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$.

c) Să se afle aria suprafeţei cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 60

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ știind că numerele $x,\ x-1,\ x+2$ sunt în progresie geometrică.
2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x+1}=x-5$.
3. Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care $x+y=6$ și $xy=8$.
4. Prețul unui produs este 2400 lei. Cu ce procent trebuie ieftinit produsul pentru ca acesta să coste 1800 lei.
5. Fie triunghiul ABC și $N \in (BC)$ astfel încât $\frac{BN}{NC}=\frac{1}{2}$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
6. Știind că $x \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ și $\sin x=\frac{3}{5}$ să se calculeze $\sin 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze A^2-3A+I_2.

b) Să se afle inversa matricei A.

c) Să se rezolve ecuația $\det(A-xI_2)=0$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=xy-4x-4y+20$.

a) Să se arate că $G=(4,+\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$, în raport cu legea "$*$".

b) Să se determine elementul neutru al legii "$*$".

c) Să se rezolve ecuația $x*x=4$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^3\ln x$.

a) Să se arate că $xf'(x)-3f(x)=x^3,\ \forall x>0$.

b) Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{f''(x)}{x^2}$.

2. Fie funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=1+\ln x,\ g(x)=x\ln x$.

a) Să se arate că g este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)\cdot g^3(x)\,dx$.

c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 61

SUBIECTUL I

1. Se dă progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 4$ şi $r = 3$. Calculaţi a_4.

2. Pentru $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_3\left(\frac{x}{3}\right)$, să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot f(5)$.

3. Să se calculeze $C_{2014}^{2013} - C_{2014}^{1}$.

4. În reperul cartezian xOy, se consideră punctele $A(2,3)$ şi $B(5,6)$. Să se calculeze lungimea segmentului $[AB]$.

5. Să se calculeze $\sin^2 30^\circ + \cos^2(150^\circ)$.

6. Să se calculeze $A_{(ABC)}$ ştiind că $AC = 3, BC = 5$ şi $m(\hat{C}) = 30^0$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\det(A-B)$.

b) Să se arate că $A^2 = I_2$.

c) Să se arate că matricea A este inversabilă şi să se calculeze A^{-1}.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = x + y + 2013$.

a) Ştiind că legea de compoziţie „$*$” este asociativă, să se calculeze $2 * 0 * (-2)$.

b) Să se verifice că $e = -2013$ este elementul neutru al legii „$*$”.

c) Să se rezolve ecuaţia $x^2 * x = 2013$, unde $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = -2x + \ln x$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

b) Să se arate dacă $f'(x)=\frac{1-2x}{x}$, oricare ar fi $x > 0$.

c) Să se arate că f este descrescătoare pe $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

2. Se consideră funcţiile $f, F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x + 2014$ şi $F(x) = x^2 + 2014x - 3$.

a) Să se verifice că F este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x}$, unde G este o primitivă a funcţiei f.

Scanned with OKEN Scanner

SESIUNEA IUNIE -2013

SUBIECTUL I

1. Arătaţi că $3\left(2-\sqrt{2}\right)+3\sqrt{2}=6$.
2. Calculaţi $f(0)\cdot f(2)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-1$.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x-2}=25$.
4. Preţul unui obiect este 100 *lei*. Determinaţi preţul obiectului după o scumpire cu 10%.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ şi $B(1,3)$. Calculaţi distanţa de la punctul A la punctul B.
6. Calculaţi $\cos 45^0+\cos 135^0$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $M(a)=\begin{pmatrix}2a & 0\\ 0 & 2a\end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că $M\left(\frac{1}{2}\right)+M\left(-\frac{1}{2}\right)=M(0)$.

b) Determinaţi numărul real a pentru care $\det(M(A))=0$.

c) Determinaţi matricea $M(-2)+M(-1)+M(0)+M(1)+M(2)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+1$.

a) Arătaţi că $f(1)=0$.

b) Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g=X^2-2X+1$.

c) Calculaţi $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}-1$.

a) Arătaţi că $2\sqrt{x}f'(x)=1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

b) Verificaţi dacă dreapta de ecuaţie $y=\frac{1}{4}x$ este tangentă la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=4$, situat pe graficul funcţiei f.

c) Arătaţi că funcţia f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1+\frac{1}{x}$.

a) Calculaţi $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx$.

b) Arătaţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=x^2+x+\ln x$ este o primitivă a funcţiei f.

c) Calculaţi aria suprafeţei delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=1$ şi $x=2$.

Scanned with OKEN Scanner

SESIUNEA AUGUST -2013

SUBIECTUL I

1. Arătaţi că $3\left(4-\sqrt{3}\right)+3\sqrt{3}=12$.

2. Calculaţi $f(-4)+f(4)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-16$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x-2)^2-x^2+8=0$.

4. Preţul unui obiect este 100 *lei*. Determinaţi preţul obiectului după o ieftnire cu 30%.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ şi $B(2,1)$. Calculaţi distanţa de la punctul A la punctul B.

6. Calculaţii $\cos A$, ştiind că $\sin A=\frac{1}{2}$ şi unghiul A este ascuţit.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}, I_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}b & 1\\ 0 & b\end{pmatrix}$, unde b este număr real.

a) Calculaţi $\det A$.

b) Determinaţi numărul real b pentru care $A\cdot B=2I_2$.

c) Determinaţi numărul real b pentru care $\det(A+B)=0$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+2X$.

a) Calculaţi $f(1)$.

b) Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X-2$.

c) Calculaţi $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x+2)^3$.

a) Verificaţi dacă $f'(x)=3x^2+12x+12$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că funcţia f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x^2}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+1$.

a) Verificaţi dacă funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\frac{x^3}{3}+x$ este o primitivă a funcţiei f.

b) Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=0$ şi $x=1$.

c) Arătaţi că $\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=\frac{3}{2}+\ln 2$.

Scanned with OKEN Scanner

SESIUNEA IUNIE -2014

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Arătaţi că $5\left(2+\sqrt{3}\right)-5\sqrt{3}=10$.
2. Determinaţi numărul real a ştiind că $f(1)=a$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+3$.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2x+1)=\log_2 5$.
4. Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor natural de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$ şi $B(3,5)$. Calculaţi distanţa de la punctul A la punctul B.
6. Arătaţi că $\sin^2 30^\circ+\cos^2 45^\circ=\frac{3}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}3 & x\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătaţi că $\det(A)=0$.

b) Determinaţi numărul real x, ştiind că $B+C=A$.

c) Arătaţi că $B\cdot B+B=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+4x+4y+12$.

a) Arătaţi că $0\circ(-4)=-4$.

b) Arătaţi că $x\circ y=(x+4)(y+4)-4$ pentru orice numere reale x şi y.

c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x=12$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x+1}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{3}{4}$.

c) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-1$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 e^x dx=e-1$.

b) Arătaţi că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

c) Calculaţi $\int_0^1 F(x)dx$.

Scanned with OKEN Scanner

SESIUNEA AUGUST -2014

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Pentru $a=3$ arătați că $\frac{a}{2}-\frac{2}{a}=\frac{5}{6}$.
2. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x+1$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+5}=3$.
4. Prețul unei imprimante este de 120 de lei. Determinați prețul imprimantei după o scumpire cu 10%.
5. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2), B(2,5)$ și $C(6,5)$. Determinați perimetrul triunghiului ABC.
6. Calculați $\cos A$ știind că $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$ și unghiul A este ascuțit.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, unde b este număr real.

a) Arătați că $\det A=-2$.

b) Determinați numărul real b pentru care $A+B=AB+C$.

c) Arătați că $\det(B+2C)=\det B-\det A$, pentru orice număr real b.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+X+2$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $f(1)=0$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f prin $X-1$

c) Arătați că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=-2$ știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-\ln x$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

b) Arătați că $f'(x)=2x-\frac{1}{x}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

c) Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

a) Arătați că $\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$.

b) Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

c) Arătați că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe intervalul $(-1,+\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

SESIUNEA IUNIE -2015

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Arătați că $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{20}{7}=2$.
2. Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-2$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3}=4$.
4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$ acesta să fie multiplu de 15.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$ și $B(4,6)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.
6. Arătați că $\sin x=\frac{12}{13}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{5}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\det A=-2$.

b) Arătați că $A+B=5C$.

c) Demonstrați că $AB+BA+4I_2=25C$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+4x+4y+12$.

a) Arătați că $5\circ(-4)=-4$.

b) Arătați că $x\circ y=(x+4)(y+4)-4$, pentru orice numere reale x și y.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^3+3x^2+5$.

a) Arătați că $f'(x)=6x(x+1), x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)-2x^3}$.

c) Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x^3+3x^2$.

a) Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-3x^2\right)dx=15$.

b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=2015$.

c) Determinați numărul natural n, $n>1$, știind că $\int_1^n\frac{f(x)}{x^2}dx=9$.

Scanned with OKEN Scanner

SESIUNEA IUNIE -2016

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Arătaţi că $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{10}{3}=1$.
2. Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(1,0)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-a$.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+1}=5$.
4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie multimplu de 30.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,5)$ şi $B(7,5)$. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului AB.
6. Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{5}{13}$, arătaţi că $\operatorname{tg}x=\frac{12}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că $\det A=1$.

b) Arătaţi că $B\cdot B+A=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

c) Determinaţi numerele reale x şi y, pentru care $A+B=\begin{pmatrix}2^x & 0\\ 0 & 4^y\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-2X+1$.

a) Arătaţi că $f(1)=-2$.

b) Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $X+1$.

c) Demonstraţi că $(x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1+x_2)=-3$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^3+3x+2$.

a) Arătaţi că $f'(x)=3(1-x)(1+x), x\in\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=-9$.

c) Demonstraţi că $f(x)\le 4$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+2$.

a) Arătaţi că $\int_{-1}^{1}(f(x)-2)\,dx=0$.

b) Arătaţi că $\int_{0}^{1}e^x f(x)\,dx=2e-1$.

c) Determinaţi numărul real a, ştiind că $\int_{0}^{a}f(x)\,dx=\int_{0}^{6-a}(f(x)-4)\,dx$.

Scanned with OKEN Scanner

Indicaţii şi răspunsuri

Clasa a IX-a

I. Mulţimi şi elemente de logică matematică

2. a) 9; b) 6; c) $\frac{1}{2}$. **3.** $a=12$. **4.** $11-4\sqrt{6}=\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2$, $b=6$.

5. $a=14$, $b=\frac{3}{10}$. **6.** a) 28; b) $4a^2$. **7.** $E=10$. **8.** $m_a=8$, $m_g=6$.

9. $a<d<c<b$. **17.** $\frac{4}{11}=0,(36)$. **18.** $\frac{10}{13}=0,(769230)$. **21.** $[a]=44$, $[b]=-23$, $[c]=4$.

24. $A\cap\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,5,6\}$. **25.** a) $\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$; b) $\{0,1,2,3,4,5\}$.

28. a) $x\in\{1,-9\}$; b) $x\in\{2,5\}$; c) $x=4$; d) $\varnothing$. **29.** a) $x\in\left\{\frac{1}{12},\frac{1}{4}\right\}$; c) $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

d) $x\in\left\{\frac{10}{3},-\frac{2}{3}\right\}$. **30.** a) $\varnothing$; b) $x\in\left\{-\frac{1}{4},\frac{5}{6}\right\}$; c) $x=\frac{3}{4}$. **32.** a) $-2<x-7<2\Rightarrow$

$5<x<9\Rightarrow x\in(5,9)$; b) $-5\le 3x-1\le 5\Rightarrow -\frac{4}{3}\le x\le 2$; c) $\varnothing$; d) $x=8$.

33. a) $x-5>1$ sau $x-5<-1\Rightarrow x>6$ sau $x<4\Rightarrow x\in(-\infty,4)\cup(6,+\infty)$; b) $3-x>2$ sau

$3-x<-2\Rightarrow x<1$ sau $x>5\Rightarrow x\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$. **34.** $x=2$. **35.** $3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$;

$5-2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$. **38.** a) $A=\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]$; b) $A=\left(-\frac{5}{3},+\infty\right)$; c) $C=\left(-\infty,\sqrt{3}\right)$.

39. a) $A=[-5,4]$; b) $B=\left[-3,\frac{7}{2}\right]$; c) $C=[-4,1)$. **40.** $-9\le 2x-5\le 9\Rightarrow -2\le x\le 7\Rightarrow$

$A=[-2;7]$. **41.** a) $A=[-1,3]$, $B=(1,9)$; b) $A\cap B=(1,3]$, $A\setminus B=[-1,1]$.

42. a) $\left[-2,-\frac{1}{3}\right)$ **43.** b) $[-3,1]$; c) $(1,+\infty)$; d) $(-\infty,-3)\cup[2,+\infty)$.

44. $v(p)=1$ sau $v(q)=1$. **45.** $v(p)=0$ sau $v(q)=0$. **46.** $v(p)=0$. **48.** $v(p)=1$, $x=-2$.

49. $v(q)=1$, $x=4$. **50.** $v(r)=0$, $x=1\Rightarrow 5x-1>0$. **51.** a), b), c), d), e) adevărate

52. $A=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$, $B=[0,3]$. a) adevărată; b) falsă; c) adevărată.

II. Funcţii

2.1. Şiruri

1. a) -1, 1, 3; b) $-\frac{1}{2}$; 0; $\frac{1}{4}$; c) $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1; d) $y_n=\frac{n}{n+1}$; $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$.

2. $x_2=3$, $x_3=13$. **3.** a) $\frac{n}{n+1}$; b) $\frac{n^2}{n+1}$. **4.** a) $a_1=\frac{2}{3}$, $a_2=\frac{7}{4}$, $a_3=\frac{12}{5}$;

b) $\frac{5n-3}{n+2}=4\Rightarrow n=11$. **5.** a) $\frac{n^2+n}{n+3}=\frac{52}{5}\Rightarrow n=12$; b) nu. **6.** $a_1=1$, $r=6$, $a_{10}=55$.

7. $a_1+2r=5$ şi $a_1+5r=11\Rightarrow a_1=1$, $r=2$. **8.** $a_1+4r=13\Rightarrow a_1=1\Rightarrow a_{2011}=6031$.

9. a) $5=6+r\Rightarrow r=-1\Rightarrow S_7=\frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7=21$; b) $a_1+r+a_1+7r=48\Rightarrow a_1=4$.

Scanned with OKEN Scanner

10. $16=8r\Rightarrow r=2$. **11.** $a_4=5$. **12.** $a_1+r=10$ şi $a_1+6r=\frac{37}{2}\Rightarrow r=\frac{17}{10}$.

13. a) $26=2a_1+12r$ şi $a_1-r=\frac{19}{2}\Rightarrow\begin{cases}a_1+6r=13\\a_1-r=\frac{19}{2}\end{cases}\Rightarrow r=0,5,\ a_1=10$; b) $a_1=3r-1\Rightarrow$

$\Rightarrow a_2=4r-1\Rightarrow(3r-1)(4r-1)=6\Rightarrow r_1=1,\ a_1=2$ şi $r_2=-\frac{5}{12},\ a_1=-\frac{9}{4}$. **14.** a) $r=4$. Din

$1+(n-1)\cdot 4=25\Rightarrow n=7$ şi $S=\frac{1+25}{2}\cdot 7=91$; b) $r=10$ şi $1+10(n-1)=111\Rightarrow n=12$ şi

$S=\frac{1+111}{2}\cdot 12=672$; c) $S_{10}=100$; d) $S_{15}=-255$. **15.** $a_1+a_2=10\Rightarrow 2a_1+r=10\Rightarrow$

$\Rightarrow a_1=3$. **16.** $5=a_1+r\Rightarrow r=3\Rightarrow S_6=57$. **17.** a) $37=7+6r\Rightarrow r=5\Rightarrow S_{10}=295$;

b) $\begin{cases}4=a_1+4r\\7=a_1+16r\end{cases}\Rightarrow r=\frac{1}{4},\ a_1=3$. **18.** $18=a_1+2\cdot\frac{3}{2}\Rightarrow a_1=15$ şi $S_9=189$.

19. $2\left(3x^2-2x-1\right)=2+12\Rightarrow 3x^2-2x-8=0\Rightarrow x\in\left\{2,-\frac{4}{3}\right\}$. **20.** $a_4=27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=1$.

21. $6=2\cdot q\Rightarrow q=3\Rightarrow b_5=b_1\cdot q^4=162$. **22.** $b_4=b_1\cdot q^3\Rightarrow\frac{b_1}{b_4}=\frac{1}{q^3}=\frac{1}{8}\Rightarrow q=2$. Avem că

$3=b_1\cdot q\Rightarrow b_1=\frac{3}{2}$. **23.** $b_2=6\Rightarrow 6=3q\Rightarrow q=2$. **24.** $b_1\cdot b_2\cdot b_3=b_1^3\cdot q^3=-8$.

25. a) $S=\frac{2^8-1}{2-1}=2^8-1$; b) $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{11}}\right)$. **26.** $8=q^3\Rightarrow q=2$. Avem că

$255=b_1\cdot\frac{1-q^8}{1-q}\Rightarrow b_1=1$. **27.** $\frac{(x-3)+(x+3)}{2}=4\Rightarrow x=4$.

28. $\frac{(x+1)+(x-3)}{2}=2x-3\Rightarrow x=2$. **29.** $\frac{1+x+2}{2}=x\Rightarrow x=3$. **30.** $x-1+x+3=2(2x-2)$

$\Rightarrow x=3$. **31.** a) $\left(x^2+2x-1\right)+(3x-7)=2(5x-7)\Rightarrow x\in\{2,3\}$;

b) $\left(2x^2-9x-3\right)+\left(2x^2-11x+19\right)=2\left(x^2-3x-2\right)\Rightarrow x\in\{2,5\}$;

c) $(-2x-1)+(5+2x)=2|2x-1|\ \Rightarrow|2x-1|=2\Rightarrow x\in\left\{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\}$; d) $x\in\left\{1,-\frac{3}{2}\right\}$.

32. $(x+7)^2=(5-x)\cdot(3x+11)\Rightarrow x\in\left\{-3,\frac{1}{2}\right\}$. **33.** $(x+1)^2=(x-1)(2x+5)\Rightarrow x\in\{2,-3\}$.

34. a) $(5x-8)^2=(4x-7)\cdot(7x-10)\Rightarrow x^2-3x+2=0\Rightarrow x\in\{1,2\}$; b) $x\in\left\{-3,\frac{1}{3}\right\}$;

c) $(3x-4)^2=\frac{x\cdot(5x-4)}{3}\Rightarrow x\in\left\{2,\frac{12}{11}\right\}$; d) $(9x+6)=(x-1)\cdot 2x\Rightarrow x\in\left\{-\frac{1}{2},6\right\}$.

35. $x+1=\sqrt{(x-2)(x+13)}\Rightarrow x=3$. **36.** $(3x+2)^2=(3x-1)(24x)\Rightarrow x\in\left\{-\frac{2}{21},\frac{2}{3}\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

2.2. Funcții. Lecturi grafice

1. a) $A\times B=\{(2,-1),\ (2,0),\ (2,4),\ (3,-1),\ (3,0),\ (3,4)\}$. **2.** a) $A=\{-1,1\}$, $B=\{0,1,2\}$;

b) $A=\{-2,-1,0\}$, $B=\{-1,0,3\}$. **3.** a) $4\times 3=12$ elemente; b) 12.

4. $M=\{(2,-3),\ (4,-2),\ (6,-1),\ (8,0),\ (10,1)\}$.

5. $A=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$;

$B=\{(-5,-2),(-4,-1),(-3,0),(-2,1),(-1,2),(0,3),(1,4),(2,5)\}$.

7. $2a-1<0\Rightarrow a\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$. **8.** $3a-6<0\Rightarrow a<2\Rightarrow a\in(-\infty,2)$. **9.** $\begin{cases}2a-4>0\\5-a>0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow a\in(2,5)$. **10.** $\begin{cases}2x+5>0\\4x-11<0\end{cases}\Rightarrow x\in\left(-\frac{5}{2},\frac{11}{4}\right)\cap\mathbb{Z}=\{-2,-1,0,1,2\}$.

11. $3-x=0\Rightarrow x=3\Rightarrow A(-1,0)$. **12.** $x^2-3x+2=0\Rightarrow x\in\{1,2\}\Rightarrow A_1(0,2),\ A_2(0,4)$.

13. $\begin{cases}x^2-9=0\\4y-y^2=0\end{cases}\Rightarrow x\in\{-3,3\},\ y\in\{0,4\}\Rightarrow (x,y)\in\{(-3,0),(-3,4),(3,0),(3,4)\}$.

14. $A\in\{(3,3),\ (3,2),\ (3,1),\ (3,0)\}$. **15.** $A\in\{(-2,-2),(-1,-2),(0,-2),(1,-2),(2,-2)\}$.

16. a) $G_f=\{(-1,-11),(0,-7),(1,-3),(2,1),(3,5),(4,9)\}$. **18.** $S=30$.

19. $f(-3)=4\Rightarrow m=-2$. **21.** a) $|f(x)|\le 6,\ \forall x\in D_f$; b) $|f(x)|\le 7,\ \forall x\in D_f$.

22. $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}$. **23.** $f(-x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. **24.** $f(-x)=-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

25. Funcția este pară. Axa de simetrie $y=0$. **26.** Funcția este impară.

27. $f(7-x)=(7-x)^2-7(7-x)+15=f(x),\ \forall x\in[-1,8]$.

28. $f(-4-x)+f(x)=\frac{-3x-12-7}{-x-2}+\frac{3x-7}{x+2}=\frac{3x+19+3x-7}{x+2}=6,\ \forall x\in D_f$.

29. $f(n+2)=(-1)^{n+2}=(-1)^n=f(n),\ \forall n\in\mathbb{Z}$. **30.** $T=4$.

33. $(f\circ g)(x)=f(g(x))=3(-x+4)+5=-3x+17$; $g(f(x))=-3x-1$; $f(f(x))=9x+20$;

$g(g(x))=x$. **34.** $f(g(x))=2(x^2-4x)-3=2x^2-8x-3$;

$g(f(x))=(2x-3)^2-4(2x-3)=4x^2-20x+21$. **35.** a) $11=4(3x-8)-5\Rightarrow x=4$;

b) $3(4x-5)-8+35=0\Rightarrow x=1$. **36.** $f(-1)=5-m\Rightarrow f(f(-1))=f(5-m)=m(5-m)+5=$

$=-m^2+5m+5$. Se obține $m\in\{2,3\}$. **37.** $f(f(x))=x+4$. Se obține $x+4=(x+2)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\{0,-3\}$. **38.** $f(g(x))=-3x$, $g(f(x))=8-3x\Rightarrow S=-8$.

2.3. Funcția de gradul I

1. a) $3(ax+b)+2=3x+5\Rightarrow a=1,\ b=1$; b) $f(1)+f(2)+f(3)=6a+3b$, $f(4)=4a+b$. Se

obține $b=0$, $a=2$. **2.** a) $\begin{cases}f(2)=7\\f(-1)=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}2a+b=7\\-a+b=-2\end{matrix}\Rightarrow a=3,\ b=1$;

b) $f(-1)=-1$, $f(1)=3\Rightarrow\begin{cases}-a+b=-1\\a+b=3\end{cases}\Rightarrow b=1,\ a=2$. **3.** $f(1)=-8\Rightarrow 2a-3+\frac{a-1}{3}=-8\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow a=-2$. **4.** $f(1)=-2\Rightarrow m+\frac{m+2}{5}=-2\Rightarrow m=-2$. **5.** $f(-1)=g(-1)\Rightarrow b-a=a-b\Rightarrow$

$\Rightarrow a=b\Rightarrow f(x)=g(x)=a(x+1)$. **10.** a) $f(x)=-1\Rightarrow x=2\Rightarrow A(2,-1)$;

b) $f(5)=8\Rightarrow A(5,8)$. **11.** Fie $f(x)=ax+b$. a) $f(-2)=0$ și $f(5)=7\Rightarrow a=1,\ b=2$. Se obține $f(x)=x+2$ și $f(2)=4$, deci $A,B,C\in G_f$. **12.** 0. **13.** -21.

14. $S=(2+3)+(2^2+3)+...+(3+2^7)=3\cdot 7+2\cdot\frac{1-2^7}{1-2}=275$. **15.** $f(1)=1, f(0)=3,$

$f(-3)=9\Rightarrow f^2(0)=f(1)\cdot f(-3)$. **16.** $f(3)=0\Rightarrow$ rezultatul este zero. **17.** $a=\frac{1}{2}$.

18. a) $x\in[0,2]\Rightarrow 0\le x\le 2\Rightarrow 0\ge -4x\ge -8\Rightarrow 3\ge -4x+3\ge -5\Rightarrow \operatorname{Im} f=[-5,3]$;

b) $\operatorname{Im} g=[-7,-3]$; c) $\operatorname{Im} h=\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$; d) $\operatorname{Im} j=[-21,11]$. **19.** a) Valoarea maximă

$f(-1)=5$; b) 11.**20.** a) -1; b) 2. **21.** a) descrescătoare; b) crescătoare; c) crescătoare;

d) $a^2+1>0\Rightarrow f$ crescătoare. **22.** f crescătoare $\Rightarrow 2m-6>0\Rightarrow m\in(3,+\infty)$. **23.**

$5-m<0\Rightarrow m\in(5,+\infty)$. **24.** $3-4x-1\ge 4x\Rightarrow x\le\frac{1}{4}\Rightarrow\ x\in\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]$. **25.** a) $f(x)\ge 0\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in[3,+\infty)$ și $f(x)<0\Rightarrow x\in(-\infty,3)$. **26.** a) $x\in[2,+\infty)$; b) $x\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$; c) $x\in[-6,+\infty)$;

d) $x\in(-\infty,-9]$; e) $x\in(-\infty,-8]$; f) $x\in(-\infty,2]$. **27.** a) $\begin{cases}x-2<0\\x+1>0\end{cases}$ sau $\begin{cases}x-2>0\\x+1<0\end{cases}\Rightarrow x\in(-1,2)$;

b) $x\in[0,5)$; c) $\frac{5x}{x-1}-4>0\Rightarrow\frac{x+4}{x-1}>0\Rightarrow$ $\begin{cases}x+4>0\\x-1>0\end{cases}$ sau $\begin{cases}x+4<0\\x-1<0\end{cases}\Rightarrow x\in(1,+\infty)\cup(-\infty,-4)$;

d) $x\in\left(-\frac{3}{2},7\right)$; e) $\frac{3x-4}{2x-1}>1$ și $\frac{3x-4}{2x-1}<2\ \Rightarrow\frac{x-3}{2x-1}>0$ și $\frac{-x-2}{2x-1}<0$

$\Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$. **28.** $x\in\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$.

29. $\begin{cases}2x+y-4=0\\x+y-3=0\end{cases}\Rightarrow x=1,\ y=2$. **30.** $x=2,\ y=1$. **31.** a) $x=2,\ y=1$;

b) $x=2,\ y=12$; c) $x=1,\ y=\frac{1}{2}$; d) $x=2,\ y=8$. **32.** $\begin{cases}y=2x-1\\y=x+3\end{cases}\Rightarrow x=4,\ y=7$.

2.4. Funcția de gradul doi

1. $f(x)=ax^2+bx+c$. a) $f(1)=3, f(0)=5, f(-1)=11\Rightarrow$ $\begin{cases}a+b+c=3\\c=5\\a-b+c=11\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow a=2,\ b=-4,\ c=5\Rightarrow f(x)=2x^2-4x+5$; b) $a=2,\ b=3,\ c=-2, f(x)=2x^2+3x-2$.

2. $f(m)=1\Rightarrow m^2-3m+1=1\Rightarrow m\in\{0,3\}$. **3.** $f(2)=3\Rightarrow 4m-1=3\Rightarrow m=1$.

4. $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$. a) $V(-2,-9)$; b) $V\left(\frac{3}{2},0\right)$; c) $V\left(\frac{2}{3},\frac{16}{3}\right)$. **5.** $f(0)=8\Rightarrow c=8$.

Scanned with OKEN Scanner

$V(3,-1) \Rightarrow -\frac{b}{2a}=3$ și $-\frac{\Delta}{4a}=-1$. Se obține $f(x)=x^2-6x+8$.

6. $-\frac{b}{2a}=\frac{2m+1}{2}=\frac{7}{2} \Rightarrow m=3$. **7.** $x=-\frac{b}{2a}$. a) $x=4$; b) $x=2$; c) $x=\frac{5}{3}$; d) $x=0$.

8. $f(1)=0 \Rightarrow$ produsul este zero. **10.** $f(x)=(x-5)^2$ și $V(5,0)$. **11.** Punctele sunt $A(x_1,0)$, $B(x_2,0)$. a) $x_1=-2$, $x_2=3$; b) $x_1=x_2=4$; c) $x_1=-2$, $x_2=\frac{3}{2}$; d) $\varnothing$.

12. $A(0,f(0))$. a) $(0,-3)$; b) $(0,0)$; c) $(0,0)$; d) $(0,5)$. **13.** $a>0$, $\min=-\frac{\Delta}{4a}$. a) $-\frac{1}{4}$; b) -3; c) -5. **14.** $a<0$, $\max=-\frac{\Delta}{4a}$. a) 0; b) 8; c) $\frac{9}{8}$.

15. $a>0 \Rightarrow \operatorname{Im} f=\left[-\frac{\Delta}{4a},+\infty\right)$ și $a<0 \Rightarrow \operatorname{Im} f=\left(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}\right]$. a) $\left[-\frac{7}{2},+\infty\right)$; b) $\left(-\infty,\frac{16}{3}\right]$.

16. $-\frac{\Delta}{4a}=5 \Rightarrow m=-2$. **17.** $-\frac{\Delta}{4a}=10 \Rightarrow m=-6$. **18.** $m \in \{1;3\}$. **19.** $\frac{-b}{2a}=3 \Rightarrow \frac{m+3}{2(m-2)}=3 \Rightarrow m=3$. **20.** a) $x \in \{3,-5\}$; b) $x \in \left\{-3,\frac{1}{2}\right\}$; c) $x \in \left\{\frac{3}{2},3\right\}$; d) $x_1=x_2=5$; e) $x_1=x_2=\frac{3}{4}$; f) $\varnothing$; g) $x \in \{-1,1\}$; h) $\varnothing$. **21.** $x=0$.

22. $\Delta=(2a+1)^2-4a(a+1)=1>0$. **23.** $\Delta_m=(2m+1)^2-4m^2-4m=1>0$.

24. Se pune condiția $\Delta=0$. a) $m^2-36=0 \Rightarrow m \in \{-6;6\}$; b) $(m+3)^2-4(m+6)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow m \in \{-5,3\}$. **25.** $P=\frac{c}{a}<0 \Rightarrow m<0 \Rightarrow m \in (-\infty,0)$. **26.** $S=x_1+x_2=0 \Rightarrow m=3$.

27. $S>0$, $P>0 \Rightarrow \begin{cases} m+3>0 \\ -m>0 \end{cases} \Rightarrow m \in (-3,0)$. **28.** Dacă $S=x_1+x_2$, $P=x_1x_2$ ecuația este $x^2-Sx+P=0$. a) $x^2-2x-10=0$; b) $x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}=0$; c) $x^2-11x+30=0$.

29. $2(m+2)=m \Rightarrow m=-4$. **30.** $E=\left(\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\right)^2=\left(\frac{2010}{2010}\right)^2=1$. **31.** $m=2$.

32. $S=4$, $P=3 \Rightarrow S^2-2P=3S-2$. **33.** $m=3$. **34.** $\begin{cases} x_1+x_2=-m+1 \\ x_1x_2=3 \\ x_1=3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_2=1-m \\ x_2^2=1 \end{cases}$.

Se obține $x_2=1 \Rightarrow m=-3$ și $x_2=-1 \Rightarrow m=5$. **35.** $\Delta \le 0 \Rightarrow m \in \left[\frac{1}{4},+\infty\right)$. **36.** $\begin{cases} a-3<0 \\ \Delta<0 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow a \in \left(0,\frac{12}{5}\right)$. **37.** $\Delta<0 \Rightarrow m \in (3;7)$. **38.** Se obține că $(x-2)^2+1>0$.

39. a) $x \in [1,4] \cap \mathbb{Z}$; b) $x \in [-2,3] \cap \mathbb{Z}$; c) $x \in (-8,2) \cap \mathbb{Z}$; d) $x \in (-5,5) \cap \mathbb{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

40. a) $x\in[-1,2]$; b) Se obţine că $\frac{x^2-2x-3}{x^2-4}\le 0$. Rezultă că $\begin{cases}x^2-2x-3\le 0\\ x^2-4>0\end{cases}$ sau $\begin{cases}x^2-2x-3\ge 0\\ x^2-4<0\end{cases}$ cu soluţia $x\in(-2,-1]\cup(2,3]$. **43.** a) $x=-2,\ y=-4$ sau $x=-4,\ y=-2$; b) $x=2,\ y=3$ sau $x=3,\ y=2$. **44.** $x^2-6x+5=-4\Rightarrow x=3,\ y=-4$.

45. $f(x)=g(x)\Rightarrow x\in\{-1,5\}$ şi $A(-1,3),\ B(5,9)$. **45.** $\Delta=0\Rightarrow m=0$.

47. $\Delta=m^2-4m^2-1<0$. **48.** Metoda substituţiei.

a) $y=2x-3\Rightarrow x^2+2x-7=2x-3\Rightarrow x\in\{-2,2\}$. Se obţine $x=-2,\ y=-7$ sau $x=2,\ y=1$;

b) $x=1,\ y=2$ sau $x=-3,\ y=6$; c) $x=\frac{1}{3},\ y=2$ şi $x=\frac{2}{3},\ y=3$.

III. Vectori în plan

1. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$ şi $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$. Se obţine că $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

4. Fie M mijlocul lui $[BC]$. Se obţine că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{AO}=$

$=2\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{AO}-3\overrightarrow{AO}=\vec{0}$. **2.** Se foloseşte relaţia de la problema 1. **3.** $APNM$ este paaralelogram.

5. Fie O' simetricul lui o faţă de BC. Atunci $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OO'}=-\overrightarrow{OC}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

6. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$. **7.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}\Rightarrow$ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow ABCD$ paralelogram.

8. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AO}+2\overrightarrow{OD}=2\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}\right)=2\cdot\overrightarrow{AD}$, unde O este centrul paralelogramului.

9. Aplicăm relaţia din problema 1. Avem că $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $2\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ şi $2\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Se adună aceste relaţii. **10.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)=$

$=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$. **11.** Fie O centrul hexagonului. Avem că $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=3BC\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\ \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BC}$, adevărat. **12.** $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Aşadar $\overrightarrow{DE}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari şi $DE\parallel BC$. **13.** $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$ Şi $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$. Rezultă că $3\overrightarrow{AM}=2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\right)+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

14. $\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right)+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{GP}$ coliniar cu $\overrightarrow{AC}$.

15. $\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right)+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

16. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

17. $3\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CA}=3\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=3\cdot\overrightarrow{BA}=-3\cdot\overrightarrow{AB}\Rightarrow k=-3$.

18. $\overrightarrow{AB}=(2-3)\vec{i}+(-1+5)\vec{j}=-\vec{i}+4\vec{j}$. **19.** a) $\overrightarrow{AB}(7,-4),\ \overrightarrow{AC}(-2,-3),\ \overrightarrow{BC}(-9,1)$;

b) $\vec{u}(14,-8)$. **20.** $\overrightarrow{AB}=(4-x)\vec{i}+(2-y)\vec{j}=-5\vec{i}+3\vec{j}\Rightarrow x=9,\ y=-5$. **21.** $\vec{u}(0,7)$.

Scanned with OKEN Scanner

22. $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}-3\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{i}-2\vec{j}$. Rezultă $\alpha=1$, $\beta=1$. **23.** a) $\overrightarrow{r_A}=\vec{i}-2\vec{j}$, $\overrightarrow{r_B}=-6\vec{i}-8\vec{j}$;

b) $2\overrightarrow{r_M}=\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}=-5\vec{i}-10\vec{j}$. **24.** $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{i}-\vec{j}$, $\overrightarrow{OC}=x\vec{i}+y\vec{j}\Rightarrow$

$\overrightarrow{OC}=5\vec{i}-\vec{j}\Rightarrow C(5,-1)$. **25.** $M(5,3)$. **26.** $\overrightarrow{OM}(-1,-4.)$ **27.** $AB=5$, $BC=\sqrt{41}$,

$AC=\sqrt{50}$. **28.** $\frac{2}{3}=\frac{a}{a-2}\Rightarrow a=-4$. **29.** $\frac{4}{a-1}=\frac{a+3}{3}\Rightarrow a\in\{-5,3\}$.

30. $\overrightarrow{AB}=\alpha\cdot\overrightarrow{AC}\Rightarrow-\vec{i}+\vec{j}=\alpha(2m-3)j+\alpha(-m-2)j\Rightarrow\begin{cases}\alpha(2m-3)=-1\\ \alpha(-m-2)=1\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2m-3=m+2\Rightarrow m=5$. **31.** a) $\frac{m+2}{m}=\frac{-4}{-8}\Rightarrow m=-4$; b) $(m-4)^2+(2m-3)^2=$

$=(m+3)^2+(2m+1)^2\Rightarrow m=\frac{1}{2}$. **32.** $\vec{r}_A(6,-4)$, $\vec{r}_B\left(\frac{2}{3},5\right)$, $\vec{r}_C\left(\frac{7}{3},-3\right)$ şi

$3\vec{r}_G=\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C\Rightarrow\vec{r}_G(3,-1)$. **33.** a) $\vec{r}_G(2,2)$; b) $\vec{r}_M=\frac{\vec{r}_A+\vec{r}_B}{2}=\frac{3}{2}\vec{i}+2\vec{j}$.

34. $m-1+8+m-3=0\Rightarrow m=-2$, iar $m-5+n+1=0\Rightarrow n=6$.

35. $4\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{MC}$ şi $M(x,y)\Rightarrow 4\left[(x+2)\vec{i}+(y+4)\vec{j}\right]=3\left[(6-x)\vec{i}+(0-y)\vec{j}\right]\Rightarrow$

$x=\frac{10}{7}$, $y=-\frac{16}{7}$. Se obţine că $\overrightarrow{AM}=(x-2)\vec{i}+(y-2)\vec{j}=-\frac{4}{7}\vec{i}-\frac{30}{7}\vec{j}$. **36.** Cu teorema lui

Thales se obţine că $\frac{4}{m}=\frac{m^2}{16}\Rightarrow m=4$.

IV. Trigonometrie şi aplicaţii ale trigonometriei în geometrie

1. $AB=8\cdot\cos 60^\circ=4$, $AC=8\cdot\cos 30^\circ=4\sqrt{3}$. **2.** $\sin B=\frac{AC}{BC}\Rightarrow AC=BC\cdot\sin B=9\Rightarrow$

$\Rightarrow AC=12$. **3.** $\sin C=\cos(90^\circ-C)=\cos B=\frac{3}{5}$. **4.** $AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow$

$\Rightarrow m(\hat{A})=90^\circ\Rightarrow\cos 90^\circ=0$. **5.** $BC=2\cdot AD=20\Rightarrow AB=12$. **6.** $m(\hat{A})=90^\circ$.

a) $\frac{7}{5}$; b) $h=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{12}{5}$. **7.** $AB=9$, $AC=5\sqrt{3}\Rightarrow S=\frac{25\sqrt{3}}{2}$.

8. $\cos B=\frac{AB}{BC}\Rightarrow BC=8$. **9.** $\begin{cases}b+c=23\\ b\cdot c=120\end{cases}\Rightarrow b=8,\ c=15$ sau $b=15,\ c=8$.

10. a) $\sin^2 B+\sin^2 C=\sin^2 B+\cos^2 B=1$; b) $\sin B=\frac{AC}{BC}$, $\cos B=\frac{AB}{BC}$;

c) $\sin B=\frac{AD}{AB}$, $\sin C=\frac{AD}{AC}$ etc. **11.** $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\frac{3}{5}$. **12.** $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow p=\frac{1}{3}$. **13.** $\cos(180^\circ-x)=-\cos x=-\frac{2}{3}$. **14.** a) $\sin 60^\circ=\cos 30^\circ\Rightarrow S=0$;

b) 0; c) 0; d) $\frac{1}{2}$; e) $\sin 130^\circ=\sin 50^\circ\Rightarrow S=1$. **16.** $E=1$.

17. $\cos(90^\circ-x)=\sin x$, $\cos(180^\circ-x)=-\cos x\Rightarrow\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Scanned with OKEN Scanner

18. a) $\cos 150^\circ + \cos 30^\circ = 0$; b) $\frac{13}{3}$; c) 0, deoarece $\cos 5^\circ - \cos 5^\circ = 0$.

19. $\sin(180^\circ - x) = \sin x = \frac{4}{5}$. **20.** $-\frac{2}{3}$. **21.** $\sin 105^\circ = \sin 75^\circ$ și $\cos 105^\circ = -\cos 75^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow E = 0$. **22.** $E = 1 \cdot 1 = 1$. **23.** $\frac{AC}{\sin 45^\circ} = \frac{AO}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AC = 10\sqrt{2}$.

24. $\frac{2}{\sin A} = \frac{4}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}$. **25.** $\frac{6}{\sin A} = 2 \cdot 2\sqrt{3} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 60^\circ$.

26. $\frac{10}{\sin A} = 20 \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2}$. **27.** $\frac{BC}{\sin 30^\circ} = 36 \Rightarrow BC = 18$. **28.** a) $2R = \frac{6}{\sin 30^\circ} \Rightarrow R = 6$;

b) $R = 4\sqrt{2}$; c) $\sin B = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 16$. **29.** $\frac{3}{2}$.

30. a) $AC^2 = 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 12 \Rightarrow AC = 2\sqrt{3}$; b) $BC = \sqrt{21}$; c) $AB = 14$.

31. Fie $AD \perp BC$. $\cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **32.** $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

33. $\frac{1}{5}$. **34.** a) 2; b) $8\sqrt{2}$; c) $9\sqrt{3}$. **35.** $S = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2}$.

36. a) $S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, $l = 2$; b) $h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow l = 6$, $S = 9\sqrt{3}$. **37.** Se aplică formula lui Heron.

a) 6; b) $15\sqrt{3}$. **38.** a) $S = 2 \cdot \frac{AB \cdot AD}{2} \cdot \sin A = \frac{9}{2}$; b) 40.

Clasa a X-a

I. Mulțimi de numere

I.1. Mulțimea numerelor reale

1. a) $n = 11 \in \mathbb{N}$; b) $n = 3 \in \mathbb{Z}$; c) $n = 6 \in \mathbb{N}$. **2.** a) $b = \sqrt{3} - \sqrt{2} < \sqrt{2} = a$;

b) $a^6 = 27 > 25 = b^6 \Rightarrow a > b$. **3.** a) Numerele sunt: 16; 64; 2. **4.** a) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$;

b) $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$; c) $n = \frac{1}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$. **5.** a) 0; b) -72; c) $\sqrt[3]{5}$.

6. $3n \le 10 \Rightarrow n \in \{0, 1, 2, 3\}$. **7.** a) $6^{\frac{1}{2}}$; b) $2^{\frac{2}{3}}$; c) $2^{\frac{9}{2}}$; d) 3^1. **8.** a) $\sqrt{4}$; b) $\sqrt[3]{9}$;

c) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$; d) $\sqrt{(0,25)^3}$. **9.** a) 3^3; b) $2^{8 \cdot \frac{4}{3}} \cdot 2^{-6 \cdot \frac{2}{3}} = 2^{\frac{20}{3}}$; c) $16 : 16 = 1$.

10. a) $2x - x^2 \ge 0 \Rightarrow x \in [0, 2]$; b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; c) $x + 3 > 0 \Rightarrow x \in (-3, \infty)$.

11. $m_a = \frac{23}{3}$, $m_g = 6$. **12.** a) $\log_2 32 = 5$; b) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$. **13.** a) $2 < 3 < 4 \Rightarrow$

$\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4$ etc.; b) $4 < 3^2 \Rightarrow \log_3 4 < 2$; c) $4 < 6$. **14.** a) 0; b) 0; c) 14;

d) $\log_2(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) = \log_2 4 = 2$. **15.** a) $\log_6 \frac{24}{4} = \log_6 6 = 1$; b) 0; c) $\log_5 5 = 1$;

d) $\lg \frac{20 \cdot 3}{6} = 1$; e) $\log_6 \frac{3 \cdot 10}{5} = 1$; f) $2 \log_5 3 \cdot \log_3 5 = 2$. **16.** a) $\log_2 \frac{14 \cdot 3}{6} = \log_2 7$;

Scanned with OKEN Scanner

b) $3+5-5=3$; c) $\log_2\frac{5\cdot 12}{30}=\log_2 2=1$. **17.** $\log_3\frac{8\cdot 100}{25}=\log_3 32=5\log_3 2=5a$.

18. $\log_2 18=\log_2\left(2\cdot 3^2\right)=1+2\log_2 3=1+2a$. **19.** $\log_3 24=\log_3\left(2^3\cdot 3\right)=\log_3 2^3+\log_3 3=$

$=3\log_3 2+1=3a+1$. **20.** a) $\log_8 80=\frac{\log_2 80}{\log_2 8}=\frac{1}{3}\left(\log_2 16\cdot 5\right)=\frac{1}{3}\left(4+\log_2 5\right)=\frac{a+4}{3}$;

b) $\log_{100}20=\frac{\log_2 20}{\log_2 100}=\frac{\log_2 4+\log_2 5}{\log_2 4+\log_2 25}=\frac{2+a}{2+2a}$. **21.** a) $\lg\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}\right)=\lg\frac{1}{10}=-1$;

b) $A=\log_3\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{9}{8}\right)=\log_3 9=2$. **22.** $\log_3 9=2$, $\sqrt[3]{64}=4$ şi $2^2=1\cdot 4$.

23. $\log_{12}6+\log_{12}24=\log_{12}12^2=2$. **24.** a) $x-4>0\Rightarrow x\in(4,+\infty)$; b) $x^2+1>0\Rightarrow x\in\mathbb{R}$;

c) $x+2>0$ şi $x+2\neq 1\Rightarrow x\in(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$; d) $x^2-5x+4>0\Rightarrow x\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$;

e) $9-x^2>0\Rightarrow x\in(-3,3)$; f) $\frac{x-5}{1-x}>0$ şi $x\neq 1\Rightarrow x\in(1,5)$.

1.2. Mulţimea numerelor complexe

1. a) Se obţine sistemul de ecuaţii: $5-2x=3y-4$, $4y-x=5+x$ cu soluţia $x=\frac{3}{2}$, $y=2$;

b) $(x+2y)+\mathrm{i}(2x-y)=4+3\mathrm{i}\Rightarrow x+2y=4$, $2x-y=3$, cu soluţia $x=2$, $y=1$. **2.** a) $-3+4\mathrm{i}$;

b) $-435-308\mathrm{i}$; c) $4\mathrm{i}$; d) $\frac{(4+3\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{9+16}-\frac{(2+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{1+4}=\frac{25\mathrm{i}}{25}-\frac{5\mathrm{i}}{5}=0$; e) 4.

3. a) $\frac{\left[(1-\mathrm{i})^2\right]^{12}}{2^{12}}=\frac{(-2\mathrm{i})^{12}}{2^{12}}=1$; b) -1; c) -4; d) -14; e)

$(1+\mathrm{i})^{20}=\left[(1+\mathrm{i})^2\right]^{10}=\ldots=(2\mathrm{i})^{10}=-2^{10}$. **4.** a) $-\frac{8}{5}$; b) 6; c) 1; d) 2^{12}. **5.** a)

$z=-64$; b) $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{5}$; c) $z=0$. **6.** a) $z=-\mathrm{i}$; b) $z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}$; c) $z=\mathrm{i}$, etc.

7. $|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}$, $a,b\in\mathbb{R}$. a) $|z|=\frac{|8+\mathrm{i}|}{|7-4\mathrm{i}|}=\frac{\sqrt{8^2+1^2}}{\sqrt{7^2+(-4)^2}}=1$;

b) $|z|=\left[\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2+\left(\sqrt{2}-1\right)^2}\right]^2=6$; c) $|z|=|\mathrm{i}|=1$; d) $|z|=|3+4\mathrm{i}|^4=5^4$; e) 1; f) $5\sqrt{2}$.

8. a) i; b) $\mathrm{i}^{1+2+\ldots+10}=-\mathrm{i}$; c) Deoarece $\mathrm{i}^{4k}=1$, $k\in\mathbb{N}$, rezultă că produsul este zero,

$1-\mathrm{i}^4=0$. **9.** $a\in\{0,1\}$. **10.** a) $-9+46\mathrm{i}=a+b\mathrm{i}$; $a=-9$; $b=46$; b) $a=-64$; $b=0$;

c) $a=0$; $b=1$; d) $a=-8$, $b=8\sqrt{3}$. **12.** Avem egalitatea $8x+\mathrm{i}(-4-4y)=6+\mathrm{i}(1-5y)$. Se

obţine $x=\frac{3}{4}$, $y=5$. **13.** Fie $z=a+b\mathrm{i}$, $a,b\in\mathbb{R}$, $z\neq 0$. Obţinem egalitatea

$(a-b\mathrm{i})+7\mathrm{i}=6(a+b\mathrm{i})$, de unde rezultă ecuaţiile $a=6a$, $7-b=6b$, cu soluţiile $a=0$, $b=1$.

Aşadar $z=\mathrm{i}$. **14.** Dacă $z=a+b\mathrm{i}$, $a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow 2z+3\bar{z}=2a+2b\mathrm{i}+3a-3b\mathrm{i}=5a-b\mathrm{i}$. Din

condiţia $2z+3\bar{z}\in\mathbb{R}$, rezultă $b=0$, deci $z=a\in\mathbb{R}$. **15.** Pentru $z=a+b\mathrm{i}$, $a,b\in\mathbb{R}$ avem:

Scanned with OKEN Scanner

$i(z-\bar{z})=-2b\in\mathbb{R}$. **16.** $z=\frac{(a+2i)(2-ai)}{4+a^2}=\frac{4a}{4+a^2}+i\cdot\frac{4-a^2}{4+a^2}$. Din condiția $z\in\mathbb{R}$, rezultă $4-a^2=0$, cu $a\in\{\pm2\}$. **17.** $a_1=1$, $a_2=\frac{5}{4}$. **18.** a) Fie $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$, $z^2=3-4i\Leftrightarrow(a+bi)^2=3-4i\Leftrightarrow a^2-b^2+2abi=3-4i$. Se obține sistemul de ecuații $a^2-b^2=3$ și $ab=-2$. Pentru $a=\frac{-2}{b}$, rezultă $\left(-\frac{2}{b}\right)^2-b^2=3$. Se obține ecuația bipătrată $b^4+3b^2-4=0$ cu soluția pozitivă $b^2=1$, din care se găsește $b=\pm1$ și $a=\mp2$. Așadar, $z_1=2-i, z_2=-2+i$;

b) $z^2=i$, $z_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; c) $z_{1,2}=\pm\sqrt{2}\left(1+\frac{i}{2}\right)$. **19.** a) Luăm $z=a+bi, a,b\in\mathbb{R}$ și ecuația se scrie: $a+i(b+3)=5(a-bi)$. Rezultă sistemul de ecuații $a=5a$ și $b+3=-5b$, cu soluția $a=0$, $b=-\frac{1}{2}$, iar $z=-\frac{i}{2}$; b) $z_1=\frac{-35}{3}+4i, z_2=3+4i$; c) $z_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i, z_{3,4}=\pm\frac{1}{2}$.

21. $z_1=1+i, z_2=-1-i$. **22.** Din $z^2+z+1=0\Rightarrow z^3+z^2+z=0\Rightarrow z^3=-z^2-z=1$ și $z^4=z$. Rezultă că $z^4+\frac{1}{z^4}=z+\frac{1}{z}=\frac{z^2+1}{z}=\frac{-z}{z}=-1$. **24.** a) $\pm3i$; b) $4\pm3i$; c) $z_{12}=\frac{1\pm6i}{2}$.

25. $z_{1,2}=-1\pm i\sqrt{3}$ și $|z_1|=|z_2|=2$. **26.** a) Înlocuim pe z: $(-2+1)^2+(3m+1)(-2+i)+5=0$. Se obține scrierea $(6-6m)+(3m-3)i=0$ și se găsește $m=1$; b) $m=\pm2$. **27.** a) $\Delta<0\Rightarrow$ $\Rightarrow m\in(16,+\infty)$; b) $m\in\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)$; c) $m\in\left(-\frac{3}{5},1\right)$. **28.** a) Relațiile lui Viète sunt $x_1+x_2=6, x_1x_2=12$. Rezultă că $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=12$; b) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)\cdot$ $\cdot\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]=0$; c) Se folosește: $x_1^4+x_2^4=\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2(x_1x_2)^2$. **29.** Dacă x_1, x_2 sunt soluțiile, ecuația este $x^2-Sx+P=0$, unde $S=x_1+x_2, P=x_1x_2$. a) $z_1=4-3i$, $z_2=4+3i$, $S=8$, $P=25$. Ecuația este $z^2-8z+25=0$; b) $z_1=1+5i$, $z_2=1-5i$, $z^2-2z+26=0$;

c) $z_1=\frac{3-i}{2}$, $z_2=\frac{3+i}{2}$, $z^2-3z+\frac{5}{2}=0$. **30.** a) Avem că $z_1^3=1$. Rezultă că $z_1^3-1=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(z_1-1)(z_1^2+z_1+1)=0$. Deoarece $z_1\neq1$, rezultă că $z_1^2+z_1+1=0$; b) -1; c) -1.

31. $z^2-\frac{8}{z}=\frac{z^3-8}{z}=\frac{(z-2)(z^2+2z+4)}{z}=0$. **32.** a) Se notează $z^2=t$ și se obține ecuația $t^2+5t-36=0$, cu soluțiile $t_1=4$, $t_2=-9$. Revenind la notație se obțin ecuațiile: $z^2=4$ cu soluțiile $z_{1,2}=\pm2$ și $z^2=-9$ cu soluțiile $z_{3,4}=\pm3i$. **34.** Din relația $i^2+(m+1)i+m^2=0$ rezultă $m=-1$ și ecuația $z^2+1=0$ are soluțiile $z\in\{-i,i\}$. **35.** Fie $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. Se obține egalitatea $|a+(b+1)\cdot i|+a+bi=2+i$ sau $\sqrt{a^2+(b+1)^2}+=a+bi=2+i$. Rezultă că $b=1$ și $\sqrt{a^2+4}+a=2$ cu soluția $a=0$. Așadar $z=i$.

36. a) Se consideră $z=a+bi$. Rezultă că $a+bi+(1+i)(a-bi)=1$ sau $2a+b+ai=1$ cu soluțiile $a=0, b=1, z=i$. b) $z=i$. c) $z=1+i$. d) $z=i$. **37.** $x=y=-2$.

Scanned with OKEN Scanner

38. a) $m=2$. Ecuația este $z^2+2z+2=0$ cu $z_{1,2}=1\pm i$. b) $z_1^4+z_2^4=(1+i)^4+(1-i)^4=$

$=4i^2+4i^2=-8$. **39.** Fie $z=a+bi\Rightarrow i\sqrt{(a+1)^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}=1+i$. Rezultă că

$(a+1)^2+b^2=1$ și $a^2+b^2=1$ cu soluțiile $a=-\frac{1}{2}, b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

II. Funcții și ecuații

2.1 Funcția putere cu exponent natural, funcția radical, funcția exponențială, funcția logaritmică. Funcții inversabile

1. a) $f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$; b) 32. **2.** $3^n=27\Rightarrow n=3$. **3.** a) $1+8^6$;

b) 4^3-3^6. **4.** a) $3x^2+2x-1=0\Rightarrow x\in\left\{-1,\frac{1}{3}\right\}$; b) $(2x-3)^2-x^2+3=0\Rightarrow$

$x^2-4x+4=0\Rightarrow x=2$. **5.** Folosiți graficul funcției f. **7.** $1+3-5=-1$.

8. $2\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=0$. **9.** $\sqrt{x-2}=3\Rightarrow x=11$. **10.** a) $\sqrt[3]{x-2}=1\Rightarrow x=3$; b) $\sqrt[3]{2x+5}=\sqrt[3]{x}\Rightarrow$

$\Rightarrow x=-5$. **11.** $f(f(512))=f(f(2^9))=f(2^3)=2$. **12.** a) $[1,3]$; b) $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$.

13. $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})=1$. **14.** a) $4\in\mathbb{N}$;

b) $\sqrt[3]{4x-1}=3\Rightarrow x=7$. **15.** $f(16)=4, f(5)=\sqrt{5}, g(36)=\sqrt[3]{36}\Rightarrow 4+2-3=3$.

16. a) $\sqrt[n]{64}=4\Rightarrow 64=4^n\Rightarrow n=3$; b) 4. **17.** A, B. **18.** a) $\frac{31}{16}$; b) 7. **18.** 1 deoarece

$f(-x)\cdot f(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. **20.** $3^{x+1}-1=0\Rightarrow x=-1$. Rezultă $A(-1,0)$, $B(0,2)$.

21. $2^{x+3}-2=0\Rightarrow x=-2$. Rezultă $A(-2,0)$, $B(0,6)$. **23.** a) crescătoare; b) descrescătoare;

c) descrescătoare. **25.** a) $5^x\le 5^4\Rightarrow x\le 4\Rightarrow x\in(-\infty,4]$; b) $-2x-5>3\Rightarrow x<-4\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in(-\infty,-4)$; c) $x+1>7\Rightarrow x\in(6,+\infty)$; d) $x\le 6-x\Rightarrow x\in(-\infty,3]$; e) $x^2<8x-7\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in(1,7)$; f) $x^2+5x+6>0\Rightarrow x\in(-\infty,-3)\cup(-2,+\infty)$. **26.** 1.

27. $\lg\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{999}{1000}\right)=\lg\frac{1}{1000}=-3$. **28.** A, B, D. **29.** $f(8)=3\Rightarrow\log_a 8=3\Rightarrow a^3=8$

$\Rightarrow a=2$. **30.** $f(5)=m+2\Rightarrow\log_{\frac{1}{5}}5=m+2\Rightarrow m+2=-1\Rightarrow m=-3$. **31.** $f(1)=2$,

$f(3)=9\Rightarrow m_g=\sqrt{2\cdot 9}=3\sqrt{2}$. **32.** a) $a>b$ deoarece $\frac{3}{5}<\frac{9}{14}$; b) $3^6=729>720\Rightarrow$

$\Rightarrow a>b$. **33.** a) $x-3\ge 2^1\Rightarrow x\in[5,+\infty)$; b) $0<4x-5<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\Rightarrow x\in\left(\frac{5}{4},2\right)$;

c) $9-7x\ge 100\Rightarrow x\in(-\infty,-13]$; d) $0<\frac{x-5}{2}$ și $\frac{x-5}{2}>1\Rightarrow x\in(7,+\infty)$.

34. a) $\begin{cases}2x-3>0\\x+4>0\\2x-3\le x+4\end{cases}\Rightarrow x\in\left(\frac{3}{2},7\right]$; b) $10x+4>0,\ x+25>0,\ 4+10x<x+25\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow x\in\left(-\frac{2}{5},\frac{7}{3}\right)$; c) $x\neq 0$ şi $x^2\leq 25\Rightarrow x\in(-5,0)\cup(0,5)$. **35.** a) $10<15<10^2\Rightarrow$ $\Rightarrow 1<\lg 15<2\Rightarrow [a]=1$; b) $b=\log_2 73-1\Rightarrow [b]=6-1=5$; c) $125<325<625\Rightarrow [c]=3$; d) $d=-\log_6 4\Rightarrow [c]=-1$. **36.** a) $2<3<4\Rightarrow \log_2 3\in(1,2)$. **37.** $f(x)=0\Rightarrow$ $\Rightarrow \log_2(x+1)=1\Rightarrow x+2=2\Rightarrow x=0$. Se obţine punctul $A(0,0)$. **38.** $A(0,1)$, $B(6,0)$.

39. $g(f(x))=x; f(g(x))=x$. a) 2; b) $\frac{1}{9}$; c) -1. **40.** a) $2x-3>0\Rightarrow$ $\Rightarrow D=\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$; b) $4-12x>0\Rightarrow x<\frac{1}{3}\Rightarrow D=\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$; c) $-3x^2+7x-2>0\Rightarrow$ $\Rightarrow x\in\left(\frac{1}{3},2\right)$; d) $x\in(-1,0)\cup(0,2)$. **41.** a) Fie $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x_1)=f(x_2)$. Atunci $5x_1-2=5x_2-2\Rightarrow 5x_1=5x_2\Rightarrow x_1=x_2$. Funcţia este injectivă. **42.** a) $f(-1)=f(1)=4$; b) $f(-1)=f(1)=5$; c) $f(1)=f(3)=0$. **43.** a) Fie $y\in\mathbb{R}$. Din negalitatea $f(x)=y\Rightarrow$ $\Rightarrow 3x-5=y\Rightarrow x=\frac{y+5}{3}\in\mathbb{R}$. Aşadar există $x\in\mathbb{R}$ cu $f(x)=y$. **44.** c) Din $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{x_1-1}{3-x_1}=\frac{x_2-1}{3-x_2}\Rightarrow (x_1-1)(3-x_2)=(3-x_1)(3x_2-1)\Rightarrow x_1=x_2$, deci f este injectivă. Din $f(x)=y$ rezultă că $x=\frac{3y+1}{y+1}\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $\forall y\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, deci f este surjectivă. **45.** a) $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\frac{x+8}{3}$; b) $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=4-x$; c) $f^{-1}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $f^{-1}(x)=2\sqrt{x}$. **46.** $f^{-1}:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$. **47.** $f^{-1}:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\ln(x-1)$. **48.** $f^{-1}:(0,+\infty)\to(1,+\infty)$, $f^{-1}(x)=2^{\frac{x}{3}}$. **50.** a) Se pune condiţia ca $4x-9\in[-1,1]$. Se obţine $x\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$; b) Condiţie: $-1\leq\frac{3x}{5}\leq 1\Rightarrow x\in\left[-\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right]$; d) $\frac{2-x}{3x+2}\geq 0, 3x+2\neq 0$. Se obţine $x\in\left(-\frac{2}{3},2\right]$. **53.** a) Se folosesc formulele : $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$, $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$ şi $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$. Se obţine rezultatul $\frac{7}{25}$. b) $\frac{117}{125}$ c) $-\frac{4}{7}$; d) $-\frac{4}{3}$ **54.** $n=\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{1}{2}=1\in\mathbb{N}$. **55.** Avem relaţia $\arccos(\cos a)=a$, $\forall a\in[0,\pi]$. Din periodicitatea funcţiei cosinus se obţine că $f(2k\pi)=\arccos(\cos 2k\pi)=$ $\arccos 1=0$ şi $f((2k+1)\pi)=\arccos(\cos(2k+1)\pi)=$ $=\arccos(\cos\pi)=\arccos(-1)=\pi$. Se obţine suma $S=0+\pi+0+\pi+\ldots+\pi+0=1003\pi$.

2.2 Ecuaţii iraţionale, ecuaţii exponenţiale, ecuaţii logaritmice

49. a) $x-5=4\Rightarrow x=9$; b) $x=6$; c) $x=7$; d) $x\in\{-13,13\}$; e) $169-x^2=144\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow x\in\{-5,5\}$; f) $x\in\left\{\pm\sqrt{68}\right\}$; g) $x\in\{-2,3\}$; h) $x\in\{-1,2\}$. **50.** a) Condiţie $x+1\geq 0$, $5-x\geq 0$. Se obţine $x+1=(5-x)^2$ cu $x\in\{3,8\}$. Soluţie corectă $x=3$;

b) $x\geq 0$ şi $2x+3=x^2\Rightarrow x=3$; c) $x\geq 0$ şi $3x+4=4x\Rightarrow x=4$; d) $x\in\{-5,3\}$;

e) $x\in\{-1,3\}$; f) $11-2x\geq 0$ şi $16+x^2=(11-2x)^2\Rightarrow x=3$. **51.** $n=114$.

52. a) $x\in\left\{-1,\frac{1}{3}\right\}$; b) $x^2-4=x+2=0\Rightarrow x=-2$; c) $x=-1$; d) $x\in\{-1,2\}$;

e) $8-x=9-4x\Rightarrow x=\frac{1}{3}$; f) $-x+3=8x\Rightarrow x=\frac{1}{3}$. **53.** a) $2\sqrt{15x^2+9}=10x-6, x\geq\frac{3}{5}\Rightarrow x=3$;

b) $x+6=\sqrt{(x+3)(x+18)}\Rightarrow x=-2$.

54. a) $2x-1=5-x\Rightarrow x=2$; b) $x^2-x=5x-5\Rightarrow x\in\{1,5\}$; c) $x-2=-\sqrt{x}\Rightarrow$

$\sqrt{x}=2-x\Rightarrow x=1$; d) $x^2-8=2x-5\Rightarrow x\in\{-1,3\}$; e) $2x+4=x^2+5\Rightarrow x=1$;

f) $-x=x-2\Rightarrow x=1$. **55.** a) $x^2=4\Rightarrow x\in\{-2,2\}$; b) $x^2-x=2\Rightarrow x\in\{-1,2\}$;

c) $\sqrt{x-1}=2\Rightarrow x=5$; d) $x^2+x+1=3\Rightarrow x\in\{1,-2\}$; e) $2x^2+3x-2=3\Rightarrow x\in\left\{1,-\frac{5}{2}\right\}$;

f) $x^2-4x=-3\Rightarrow x\in\{1,3\}$; g) $x=0$; h) $x=-2$. **56.** a) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$, $x=-1$;

b) $15^x=15\Rightarrow x=1$; c) $6^x\cdot 3=108\Rightarrow x=2$; d) $x=4$; e) $6^x=6\Rightarrow x=1$;

f) $8^x=8\Rightarrow x=1$. **57.** a) $2^x=a\Rightarrow a+8a=36\Rightarrow a=4\Rightarrow x=2$; b) $3^x=a\Rightarrow$

$\Rightarrow a+6a=7\Rightarrow a=1\Rightarrow x=0$; c) $2^x=a\Rightarrow a^2-3a+2=0\Rightarrow a\in\{1,2\}\Rightarrow x\in\{0,1\}$;

d) $3^x=a\Rightarrow a^2-4a+3=0\Rightarrow a\in\{1,3\}\Rightarrow x\in\{0,1\}$; e) $3^x=a\Rightarrow a^2+2a-3=0\Rightarrow$

$\Rightarrow a\in\{1,-3\}\Rightarrow x=0$; f) $2^x=a\Rightarrow a^2-14+5a=0\Rightarrow a\in\{2,-7\}\Rightarrow x=1$;

g) $3^x=a\Rightarrow a+\frac{1}{a}=\frac{10}{3}\Rightarrow a\in\left\{3,\frac{1}{3}\right\}\Rightarrow x\in\{1,-1\}$; h) $6^x=a\Rightarrow a^2+7a-78=0\Rightarrow$

$a\in\{6,-13\}\Rightarrow 6^x=6\Rightarrow x=1$. **58.** a) Se împarte ecuaţia cu 9^x. Avem: $3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-\left(\frac{2}{3}\right)^x=2$.

Notăm $\left(\frac{2}{3}\right)^x=a\Rightarrow 3a^2-a-2=0\Rightarrow a\in\left\{1,-\frac{2}{3}\right\}\Rightarrow x=0$;

b) $2\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^{2x}=1+\left(\frac{7}{5}\right)^x\Rightarrow 2a^2-a-1=0\Rightarrow a\in\left\{1,-\frac{1}{2}\right\}\Rightarrow x=0$. **59.**a) $2\cdot 4^x=\left(2^x-1\right)+\left(2^{x+1}+3\right)$.

Cu $2^x=a\Rightarrow 2\cdot a^2-3a-2=0\Rightarrow a\in\left\{2,-\frac{1}{2}\right\}\Rightarrow x=1$; b) $3^{2x}=3\cdot\left(9+2\cdot 3^x\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow a^2-6a-27=0\Rightarrow a\in\{9,-3\}\Rightarrow x=2$. **60.** $2\cdot 3^{x+1}=3^x-1+5\cdot 3^x+1\Rightarrow x\in\mathbb{R}$.

61. a) $x+5=2^3\Rightarrow x=3$; b) $x-6=3^0\Rightarrow x=7$; c) $x^2-1=3\Rightarrow x\in\{-2;2\}$;

d) $9-x^2=5\Rightarrow x\in\{-2,2\}$; e) $2x+3=25\Rightarrow x=11$; f) $2x+1=49\Rightarrow x=24$;

g) $x^2-x-2=4\Rightarrow x\in\{-2,3\}$; h) $x^2+2x-3=5\Rightarrow x\in\{2,-4\}$.

62. a) $3x-1>0$, $2x+1>0$ şi $3x-1=2x+1\Rightarrow x=2$; b) $x+4>0$ şi

Scanned with OKEN Scanner

$x^2+4=x+4\Rightarrow x\in\{0,1\}$; c) $x^2-2x>0$, $2x-3>0$ şi $x^2-2x=2x-3\Rightarrow x=3$;

d) $2x+5>0$, $x^2+3x+3>0$ şi $2x+5=x^2+3x+3\Rightarrow x\in\{1,-2\}$; e) $x^2+3x-15=3\Rightarrow$

$x\in\{3;-6\}$; f) $\sqrt[3]{x}=2\Rightarrow x=8$. **63.** a) $\log_2\frac{x+2}{x-5}=3\Rightarrow\frac{x+2}{x-5}=8\Rightarrow x=6$;

b) $\log_2\frac{x+2}{x+1}=1\Rightarrow\frac{x+2}{x+1}=2\Rightarrow x=0$; c) $(x+4)(2x+3)=1-2x\Rightarrow x\in\left\{-1,-\frac{11}{2}\right\}$. Soluţie

acceptabilă $x=-1$; d) $\log_5\frac{3x+1}{x-1}=1\Rightarrow\frac{3x+1}{x-1}=5\Rightarrow x=2$; e) $\frac{x^2-x-2}{2x-4}=2\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\{2;3\}$. Soluţie acceptabilă $x=3$; f) $\frac{x+3}{x}=4\Rightarrow x=1$.

64. a) $\lg x=a\Rightarrow a^2-3a+2=0\Rightarrow a\in\{1,2\}\Rightarrow\lg x=1$ sau $\lg x=2\Rightarrow x\in\{10,100\}$;

b) $\lg x=a\Rightarrow a^2-4a+3=0\Rightarrow a\in\{1,3\}\Rightarrow x\in\{10,10^3\}$; c) $\log_3 x=a\Rightarrow 4a^2+a-5=0\Rightarrow$

$\Rightarrow a\in\left\{1;-\frac{5}{4}\right\}\Rightarrow x\in\left\{3,\ 3^{-\frac{5}{4}}\right\}$; d) $2^x=a\Rightarrow\log_2\left(a^2+a-4\right)=x+2\Rightarrow a^2+a-4=4a\Rightarrow$

$a\in\{-1.4\}\Rightarrow x=2$. **65.** a) $\log_3(5x)-\log_3(10x+1)=-1\Rightarrow\log_3\frac{5x}{10x+1}=-1\Rightarrow\frac{5x}{10x+1}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow x=\frac{1}{5}$; b) $\frac{x+7}{x^2+1}=4\Rightarrow x\in\left\{1,-\frac{3}{4}\right\}$. **66.** a) $3=\lg\sqrt{x}+\lg x\Rightarrow\lg x=2\Rightarrow x=100$;

b) $(2+\log_2 x)^2=8\log_2 x$. Notăm $\log_2 x=a$ şi avem că $(2+a)^2=8a$, cu soluţia $a=2$ şi $x=4$.

III. Probleme de numărare

1. 10. **2.** a) $10+10\cdot11=120$; b) $\frac{n!(n+1)(n+2)}{n!+n!(n+1)}=\frac{(n+1)(n+2)}{n+2}=n+1$.

3. $(n-3)(n-4)=6\Rightarrow n=6$. **4.** $n(n-1)=12\Rightarrow n=4$. **5.** a) $3=n+1\Rightarrow n=2$;

b) $(n+1)(n+2)=12\Rightarrow n=2$; c) $(n+2)(n+3)=20\Rightarrow n=2$;

d) $n+2+n+2=n^2+5\Rightarrow n=1$. **6.** $4!=24$ (numere). **7.** $6!-5!$ numere.

8. $m=7\cdot8-4\cdot9=20$. **9.** a) 120; b) 78; c) 8. **10.** $A_5^4=120$ (numere). **11.** $A_{10}^5-A_9^4$.

12. $A_4^3=24$. **13.** $n(n-1)=12\Rightarrow n=4$. **14.** a) $(n+3)(n+2)=72\Rightarrow n=6$;

b) $(2n+3)(2n+2)=110\Rightarrow n=4$; c) $2\cdot(n+1)n-(n+2)(n+1)=10\Rightarrow n=4$.

15. a) $(n+2)(n+1)\le18\Rightarrow n\in\{0,1,2,3\}$; b) $11\cdot n(n-1)>2(n+1)n(n-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow11(n-1)>2\left(n^2-1\right)\Rightarrow\ n\in\{2,3,4\}$; c) $n(n-1)-(n-1)(n-2)\le12\Rightarrow n\le7\Rightarrow$

$\Rightarrow n\in\{3,4,5,6,7\}$; d) $4x^2+7x-11\le0\Rightarrow x\in\left[-\frac{11}{4},1\right]\cap\mathbb{N}=\{0,1\}$. **16.** a) $56+56=112$;

b) 1; c) 0; d) $2\cdot3-3\cdot2=0$; e) 1. **17.** $a=8$; $b=8$. **18.** $a=1005$, $b=1006$.

19. a) $\frac{n(n-1)}{2}=28\Rightarrow n=8$; b) $n+2=2\Rightarrow n=0$; c) $1+n=8\Rightarrow n=7$; d) $n+n(n-1)=4\Rightarrow$

$n=2$; e) $\frac{n(n-1)}{2}=n+2\Rightarrow n=4$ f) $n+1=n^2-1\Rightarrow n=2$. **20.** a) $\frac{x(x-1)(x-2)}{6}=$

Scanned with OKEN Scanner

$=\frac{5}{4}x(x-3)\Rightarrow 2(x-1)(x-2)=15(x-3)\Rightarrow x=7$; b) $12x+\frac{(x+4)(x+3)}{2}=162\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+31x-312=0\Rightarrow x=8$; c) $\frac{x(x-1)}{2}+x=6\Rightarrow x^2+x-12=0\Rightarrow x=3$;

d) $\frac{(2n+1)2n}{2}+3n(n-1)=16\Rightarrow 5n^2-2n-16=0\Rightarrow n=2$. **21.** a) $n(n-1)\le n+8\Rightarrow$

$\Rightarrow n^2-2n-8\le 0\Rightarrow n\in\{2,3,4\}$; b) $n(n-1)\ge(18-n)(19-n), n\le 17\Rightarrow n\ge\frac{19}{2}, n\le 17\Rightarrow$

$\Rightarrow n\in\{10,11,12,13,14,15,16,17\}$.

22. a) $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{24}>\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}\Rightarrow\frac{x-4}{4}>1\Rightarrow x>8\Rightarrow x\in\{9,10,11,...\}$;

b) $\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n}{120}\le 5(n+4)(n+3)(n+2)\Rightarrow n(n+1)\le 600\Rightarrow n\in\{1,2,...,24\}$.

23. $C_4^2=6$. **24.** $C_6^2=15$. **25.** $C_8^3=56$. **26.** $C_n^2=6\Rightarrow n=4$. **27.** $C_n^2=36\Rightarrow n=9$

28. $C_n^2=45\Rightarrow n=10$. **29.** $A_n^2=42\Rightarrow n=7$. **30.** Sunt 4 numere impare. Se obţin $C_4^2=6$ submulţimi. Sunt 3 numere pare, deci $C_3^2=3$ submulţimi. **31.** 20, 15, 10, raţia $r=-5$.

32. $C_n^1=1+\frac{C_n^2}{4}\Rightarrow 4(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}\Rightarrow n=8$. **33.** $(n-3)^2=1\cdot\frac{n(n-1)}{2}\Rightarrow n\in\{2,n\}$.

IV. Elemente de statistică şi probabilităţi

1. $\frac{5}{100}\cdot x=2200\Rightarrow x=44000$ lei. **2.** $\frac{45}{100}\cdot x=270\Rightarrow x=600$.

3. $12000-\frac{10,5}{100}\cdot 12000=10740$ (lei) **4.** $x-\frac{20}{100}x=320\Rightarrow x=400$ lei.

5. Preţul după prima reducere este $x-\frac{15}{100}x=\frac{17x}{20}$, iar după a doua reducere se obţine:

$\frac{17x}{20}-\frac{10}{100}\cdot\frac{17x}{20}=1530$, cu soluţia $x=2000$ lei. **6.** $5400-\frac{x}{100}\cdot 5400=4860\Rightarrow x=10$.

7. $8650-\frac{x}{100}\cdot 8650=7612\Rightarrow x=12$. **8.** După prima reducere preţul este $x-\frac{10}{100}x=\frac{9x}{10}$,

iar după a doua reducere $\frac{9x}{10}-\frac{25}{100}\cdot\frac{9x}{10}=540$. Se obţine $x=800$. **9.** 3 400lei, 4 000 lei.

10. $x+\frac{15}{100}x=460\Rightarrow x=400$ lei. **11.** $8400+\frac{12}{100}\cdot 8400=9408$ (lei). **12.** 450 lei.

13. După prima scumpire: $x+\frac{10}{100}x=\frac{11x}{10}$, iar după a doua scumpire preţul este

$\frac{11x}{10}+\frac{20}{100}\cdot\frac{11x}{10}=660$. Se obţine $x=500$. **14.** 10%. **15.** Primul preţ:

$2000+\frac{10}{100}\cdot 2000=2200$. Al doilea preţ: $2200-\frac{10}{100}\cdot 2200=1980$ (lei). **16.** 288 lei. **17.**

$400+\frac{24}{100}\cdot 400=496$ (lei). **18.** $1500+\frac{8}{100}\cdot 1500=1620$ (lei). **19.** 8%. **20.** Suma finală:

Scanned with OKEN Scanner

$S=2000\cdot\left(1+\frac{1}{10}\right)^2=2420$. Dobânda este de 420 lei. **21.** $S=10000\cdot\left(1+\frac{5}{100}\right)^2=11025$ lei.

23. b) 6,40. **24.** b) 350; c) 370. **28.** Sunt 8 numere în total. Divizibile cu 3 sunt două numere; $p=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$. **29.** Total elemente: 100. Numere raţionale sunt cele de forma $\sqrt{a^2}$, în total fiind 10. Probabilitatea $p=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$. **30.** a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{3}{5}$; c) $\frac{1}{5}$; d) $\frac{3}{5}$. **31.** $\frac{3}{4}$. **32.** $\frac{2}{3}$ **33.** $\frac{4}{11}$. **34.** $\frac{5}{100}$. **35.** $\frac{1}{3}$. **36.** $\frac{22}{900}$. **37.** Submulţimile nevide sunt $2^5-1=31$, iar submulţimi cu două elemente sunt $C_5^2=10$. **38.** $\frac{3}{6}$. **39.** $\frac{5}{40}$. **40.** $\frac{9}{900}$. **41** $\frac{4}{36}$. **42.** $\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{1}{6}$. **43.** $\frac{10}{36}$. **44.** a) $\frac{8}{18}\cdot\frac{8}{18}=\frac{64}{324}$; b) $\frac{80}{324}$.

V. Geometrie

1. $AB=\sqrt{(-2-2)^2+(2+1)^2}=\sqrt{25}=5$. **2.** $OA=\sqrt{36+64}=10$.

3. $AB=\sqrt{(5-a)^2+(2+a)^2}=5\Rightarrow a^2-3a+2=0\Rightarrow a\in\{1;\,2\}$.

4. $MP=\sqrt{(2a+2)^2+(a-10)^2}=10\Rightarrow 5a^2-12a+4=0\Rightarrow a\in\left\{2,\frac{2}{5}\right\}$.

5. $AB=\sqrt{(m+2)^2+(m+2)^2}=4\sqrt{2}\Rightarrow(m+2)^2=16\Rightarrow m\in\{2,-6\}$.

6. $OM=\sqrt{(m-2)^2+m^2}=\sqrt{10}\Rightarrow m\in\{-1,3\}$. **7.** $AB=\sqrt{20}$, $AC=\sqrt{80}$, $BC=10\Rightarrow$ $AB^2+AC^2=BC^2$. **8.** $AB^2=1+(a-2)^2$, $AC^2=16+(a-5)^2$, $BC^2=34$. Din $AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow a^2-7a+6=0\Rightarrow a\in\{1;6\}$. **9.** $AB=\sqrt{13}$, $BC=\sqrt{13}$, $AC=4$, $P=4+2\sqrt{13}$. **10.** a) $M\left(\frac{5-3}{2},\frac{-4+6}{2}\right)\Rightarrow M(1,1)$; b) $M(1,-2)$. **11.** $M(0,0)$ şi $CM=\sqrt{5}$. **12.** $C\left(\frac{m^2-1+2}{2},0\right)\Rightarrow\frac{m^2+1}{2}=5\Rightarrow m\in\{-3;3\}$. **13.** a) B este mijlocul segmentului $[AM]$, $M(x,y)$ fiind simetricul lui A. Avem:

$B\left(\frac{2+x}{2},\frac{y-4}{2}\right)\Rightarrow\frac{x+2}{2}=1,\ \frac{y-4}{2}=-2\Rightarrow x=0,y=0$; b) $M(1;3)$. **14.** Mijlocul lui [BC] este $M_{BC}\left(\frac{3}{2},2\right)$. Fie $N(x,y)$ simetricul lui A faţă de M. Se obţine $N\left(\frac{0+x}{2},\frac{4+y}{2}\right)$ şi $\frac{x}{2}=\frac{3}{2},\ \frac{4+y}{2}=2$ cu soluţiile $x=3$, $y=0$, deci $N(3,0)$.

15. a) Perimetrul este jumătate din perimetrul ΔABC. Se obţine $AB=AC=\sqrt{40}$, $BC=\sqrt{80}$;

b) $G\left(\frac{1+3-5}{3},\frac{3-3+1}{3}\right)\Rightarrow G\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. **16.** $G\left(\frac{4+3+a}{3},\frac{6+4+b}{3}\right)\Rightarrow a=-5,\ b=2,\ C(-5,2)$.

17. $AB=\sqrt{40}$, $BC=\sqrt{40}$, **18.** a) $\overrightarrow{AB}(4+4,2-5)\Rightarrow\overrightarrow{AB}(8,-3)$; $\overrightarrow{AC}(4,-3)$, $\overrightarrow{CD}(0,4)$;

Scanned with OKEN Scanner

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CD}=(8+4-0)\vec{i}+(-3-3-4)\vec{j}=12\vec{i}-10\vec{j}\Rightarrow|\vec{u}|=\sqrt{144+100}=\sqrt{244}$.

19. $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-8\vec{j}$, $\overrightarrow{AC}=-\vec{i}+4\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}$, deci sunt coliniari.

20. a) $\overrightarrow{AB}(12,12)$, $\overrightarrow{BC}(-6,-11)$. Se obţine $\vec{u}(-6,-16)$; b) $\overrightarrow{MA}=(-x-6)\vec{i}+(-y-3)\vec{j}$, $\overrightarrow{MB}=(6-x)\vec{i}+(9-y)\vec{j}\Rightarrow -2x-12=6-x$ şi $-2y-6=9-y\Rightarrow x=-18,\ y=-15$.

21. a) $y-2=1\cdot(x+3)\Rightarrow y=x+5$; b) $y-\frac{1}{2}=-1\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow y=-x+2$.

22. $m^2+m+m=0\Rightarrow m\in\{0,-2\}$. **23.** $m=-1$. **24.** $3-m+n=0$ şi $1+m+n=0\Rightarrow$ $\Rightarrow m=1,\ n=-2$. **25.** a) $\frac{y+2}{-2-2}=\frac{x-3}{-1-3}\Rightarrow y+2=0$; b) $\frac{y-2}{-3-2}=\frac{x-3}{-2-3}\Rightarrow x=y+1$.

26. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$. **27.** $a+b-5=0$ şi $a-1+4-5=0\Rightarrow a=2,\ b=5$.

28. $AB:\ (a+1)x+4y-2a+2=0\Rightarrow a=1$. **29.** $\begin{cases}2x-y-2=0\\x+3y-8=0\end{cases}\Rightarrow M(2,2)\Rightarrow OM=\sqrt{8}$.

30. $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-1-a$, $m_{CD}=2$. Din $m_{AB}=m_{CD}\Rightarrow a=-3$. **31.** $\frac{a}{2}=\frac{6}{-3}\Rightarrow a=-4$.

32. $\frac{-2}{m}=\frac{-m}{1}\Rightarrow m^2=2\Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$. **33.** $m_{AB}=\frac{2}{3}=m_{CD}$. **34.** Mijloacele segmentelor $[AC]$ şi $[BD]$ trebuie să coincidă. Se obţine $D(-1,-4)$. **35.** a) $m=5$; b) $m=\frac{5}{2}$.

36. $3x-4y+7=0$. **37.** a) 5; b) 4; c) $\sqrt{5}$. **38.** $\frac{12}{5}$. **39.** $A(4,3)$, $B(0,1)$, $C(3,-1)$.

Clasa a XI-a

Elemente de calcul matriceal şi sisteme de ecuaţii liniare

I. Matrice

1. c) $50=a_{11}$, $58=a_{32}$, $68=a_{34}$. **2.** a) $A\in\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{Z})$; b) $a_{23}=-4$; $a_{31}=-3$; $a_{34}=-8$, $a_{12}=5$; c) 0. **3.** a) (5, 0, 1); b) (6, 0, 4); c) $\mathrm{Tr}(A)=5+0+1=6$;

d) ${}^tA=\begin{pmatrix}5&-1&4\\2&0&-3\\6&-7&1\end{pmatrix}$. **4.** a) $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{C})$; b) $\mathrm{Tr}\,A=6$, $\mathrm{Tr}(B)=-6$, $\mathrm{Tr}({}^tA)=6$, $\mathrm{Tr}({}^tB)=-6$.

5. a) $x=5,\ y=-6$; b) $x=-\frac{1}{2},\ y=4$. **6.** a) $2^x=1$, $3^y=1\Rightarrow x=y=0$;

b) $4^x-16=0$ şi $\lg y-1=0\Rightarrow x=2,\ y=10$. **7.** a) $x=1,\ y=2$; b) $1+\sqrt{x}=3\Rightarrow$ $\Rightarrow x=4,\ y=-1$. **8.** a) $b+2=c$, $a+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$, $5c-1=3^2\Rightarrow a=-1,\ c=2,\ b=0$;

b) $a\sqrt{2}=\sqrt{6}\Rightarrow a=\sqrt{3}$, $b^2-3=1\Rightarrow b=\pm2$ şi $2x=C_4^3\Rightarrow c=2$. **9.** $a^2-3a+2=0$, $b-6=0$, $x^2-4=0$, $\lg(x-1)=0$, $a^2-1=0$ şi $b^2-36=0\Rightarrow a=1,\ b=6,\ x=2$.

10. a) $5^{x^2-9}=5^0$, $\lg(y-3)=0$, $3^{z-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\Rightarrow x\in\{-3,3\},\ y=4,\ z=1$; b) $x\in\{4,2\},\ y=3$,

Scanned with OKEN Scanner

$u=-2$, $z\in\{-1,1\}$. **11.** $a=1$, $b=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $c=\frac{1}{2}$, $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **12.** a) $A\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $B\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $C\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$; b) $A+B=\begin{pmatrix}4&1&3\\4&4&-1\end{pmatrix}$, $A-^{t}C=\begin{pmatrix}1&-5&2\\5&-1&-2\end{pmatrix}$. **13.** c) $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}a&d\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow b+c=0$, $a=d=0$. Se obţine $A=\begin{pmatrix}0&b\\-b&0\end{pmatrix}$, $b\in\mathbb{C}$.

14. b) $X=2B-4A=\begin{pmatrix}-4&-8&0\\2&2&-8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12&-4&4\\8&-8&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16&-4&-4\\-6&10&-8\end{pmatrix}$. **15.** $3x+y=1$ şi $x+2y=-3\Rightarrow x=1$, $y=-2$. **16.** $x=-1$, $y=\frac{1}{2}$, $z=-11$, $t=\frac{5}{4}$. **17.** a) $X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&5&3\\2&7&4\end{pmatrix}$;

b) $X=\begin{pmatrix}-4&-8\\3&4\end{pmatrix}$. **18.** $\begin{pmatrix}3^{x+1}&15\\12&3\log_2 y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27&15\\12&3\end{pmatrix}\Rightarrow 3^{x+1}=27$, $\lg_2 y=1\Rightarrow x=2$, $y=2$.

19. $a_1=-2$, $r=3$. **20.** Se adună ecuaţiile. Rezultă că $2X=\begin{pmatrix}-4&2\\6&-8\end{pmatrix}$ şi $X=\begin{pmatrix}-2&1\\3&-4\end{pmatrix}$, apoi $Y=\begin{pmatrix}1&-3\\-3&4\end{pmatrix}$. **21.** Se înmulţeşte prima ecuaţie cu -2 şi se adună ecuaţiile.

$X=\begin{pmatrix}-2&1&0\\3&1&-1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-2&1&3\end{pmatrix}$. **22.** $AB=\begin{pmatrix}14&-3\\7&5\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}12&-1\\7&7\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix}3&5\\-5&8\end{pmatrix}$, $B^2=\begin{pmatrix}17&-12\\24&-7\end{pmatrix}$. **24.** $f(A)=-A^2+2A-3I_2=\begin{pmatrix}-2&2\\0&-3\end{pmatrix}$.

26. b) Fie $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Din $AX=B\Rightarrow\begin{pmatrix}2a+c&2b+d\\-a+2c&-b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4\\3&3\end{pmatrix}\Rightarrow a=-1$, $b=1$, $c=1$, $d=2$. **27.** a) $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}c&d\\d&c\end{pmatrix}\Rightarrow A+B=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\b+d&a+c\end{pmatrix}\in G$;

b) $A\cdot B=\begin{pmatrix}ac+bd&ad+bc\\bc+ad&bd+ac\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m&n\\n&m\end{pmatrix}\in G$. **28.** a) $f(1)+f(0)=\begin{pmatrix}2&1&4\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}$;

c) $f(x)\cdot f(y)=\begin{pmatrix}1&x+y&2(x+y)^2+2(x+y)\\0&1&4x+4y\\0&0&1\end{pmatrix}=f(x+y)$. **29.** a) $A^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-I_2$;

b) $\frac{1}{4}(X+I_2)^2=\frac{1}{4}(X^2+2X+I_2)=\frac{1}{4}(-I_2+2X+I_2)=\frac{1}{2}X$; c) Fie $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Din $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-b&a\\-d&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&d\\-a&-b\end{pmatrix}\Rightarrow c=-b$, $d=a\Rightarrow$

$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$. **30.** a) $AB=BA=\begin{pmatrix}2x&2y+12\\0&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x&2x+2y\\0&12\end{pmatrix}\Rightarrow x=6$, $y\in\mathbb{R}$;

c) Din b) $\Rightarrow A^2=4A-4I_2\Rightarrow A^3-4A^2+4A=O_2\Rightarrow a=4$. **31.** a) $A^3=A^2=A$;

Scanned with OKEN Scanner

b) $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)\cdot(I_2+bA)=I_2+aA+bA+abA^2=I_2+(a+b+ab)A$, deoarece $A^2=A$; c) $S=2010I_2+(1+2+...+2010)A=2010I_2+2011\cdot 1005\cdot A$.

32. a) $AB=BA=O_2$; b) $A^2=5A,\ B^2=5B\Rightarrow A^2+B^2=25I_2$; c) $C=A-IB=5I_2\Rightarrow$ $\Rightarrow C^4=5^4I_2$. **33.** a) $A^2=2A$; c) Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Din $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ se obţine că $\begin{pmatrix}a+b+c+d & -a-b-c-d\\ a+b+c+d & -a-b-c-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow a+b+c+d=0$.

34. a) $A^2=\begin{pmatrix}(x-1)^2+1 & 2x-2\\ 2x-2 & (x-1)^2+1\end{pmatrix}\Rightarrow (x-1)^2+1=2(x-1)$ şi $2x-2=2\Rightarrow x=2$.

II. Determinanţi

1. a) 7; b) 1; c) 0; d) 1; e) 0; f) 3; g) 7; h) 16. **2.** Se foloseşte regula lui Sarrus. a) 15; b) 0; c) 5; d) 14. **3.** a) 0, coloanele 1 şi 3 sunt proporţionale; b) 0; d) 0, coloanele proporţionale. **4.** a) $10x-6x=12\Rightarrow x=3$; b) $x+1+3x^2=1\Rightarrow$ $x\in\left\{0,-\frac{1}{3}\right\}$; c) $2x(x-2)-(x-1)(x+3)=-2\Rightarrow x\in\{1,5\}$; d) $2^{2x}-32=0\Rightarrow x=\frac{5}{2}$; e) $6\log_2 x-4\log_2 x=6\Rightarrow x=8$; f) $C_x^2=6\Rightarrow x=4$; g) $-2+\sqrt{x-3}=-1\Rightarrow x=4$; h) $x-1+3=5\Rightarrow x=3$. **5.** a) $x=-3$; b) $x\in\{0,1\}$;

c) $2x^2-2x=12\Rightarrow x\in\{-2;\ 3\}$. **6.** $\Delta(x)=-3(x-1)(x-4)$. a) $\Delta(4)=0$; b) $x\in\{1,4\}$; c) $(2^x-1)(2^x-4)=0\Rightarrow x\in\{1;2\}$. **7.** $x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$ cu soluţiile $x_1=x_2=1,\ x_3=-2$. a) 0; b) $1^3+1^3+(-2)^3=-6$; c) $\Delta=0$. **8.** $d=a^3+b^3+c^3-3abc$. a) 14; b) Calcul direct; c) Se obţine că $(2^x+3^x+5^x)\left[(2^x-3^x)^2+(3^x-5^x)^2+(2^x-5^x)^2\right]=0$ şi $2^x=3^x=4^x$ cu soluţia $x=0$. **9.** b) $\det(A)=0$, linii proporţionale; c) $B(-1)=I_3-A\Rightarrow\det(I_3-A)\neq 0$. **10.** $\Delta(a)=-a^3+3a-2$. a) -4; b) Calcul direct;c) $-a^3+3a-2=-4\Rightarrow a^3-3a-2=0\Rightarrow$ $(a+1)(a^2-a-2)=0\Rightarrow a\in\{-1,2\}$. **11.** a) $D(1,1,0)=0$; b) $D(a,a,x)=0$; c) $a=b\Rightarrow D(a,b,x)=0\Rightarrow x\in\mathbb{R}$, iar $a\neq b\Rightarrow x\in\{a,0\}$. **12.** a) Se adună coloana 3 la prima coloană. Se obţin coloane proporţionale; b) coloane proporţionale. **14.** a) $\det(A)=-2m-11$; b) $m=-6$. **15.** a) $m^2-3m-18\neq 0\Rightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-3,6\}$; b) $3m^2-4m\neq 0\Rightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{4}{3}\right\}$; c) $m^2-m-2\neq 0\Rightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$. **16.** b) $\Delta(x,m)=(1-m)x^2+2x-2m+3$; c) $(1-m)x^2+2x-2m+3\neq 0\Rightarrow\Delta<0,\ m\neq 1\Rightarrow -2m^2+5m-2<0\Rightarrow m\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$.

17. b) $\begin{vmatrix}x+4 & -6\\ 2 & x-3\end{vmatrix}=2\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow x\in\{1,-2\}$; c) Se are în vedere că

Scanned with OKEN Scanner

$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. **18.** a) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 5x+9y+7=0$; b) $5x-2y-2=0$.

19. $AB: 3x+4y-19=0$, $BC: 9x-17y-28=0$, $AC: 12x-13y+40=0$.

20. $A(a,b)$, $B(c,d)$, $C(e,f)$. Se obţine că $\frac{a+c}{2}=4$, $\frac{b+d}{2}=-1$, $\frac{a+e}{2}=-4$, $\frac{b+f}{2}=-3$, $\frac{c+e}{2}=0$, $\frac{d+f}{2}=1$, cu soluţiile $a=0$, $c=8$, $e=-8$, $b=-5$, $f=-1$, $d=3$ şi $A(0,-5)$, $B(8,3)$, $C(-8,-1)$. **21.** a) $AB=AC=BC=5$; c) Panta înălţimii din B este $m_1=-\frac{1}{m_{AC}}$, iar $m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$. **22.** a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$, deci A, B, C coliniare; b) da; c) sunt coliniare.

23. $\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ m-1 & 4 & 1 \\ -1 & 8 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2m-4=0 \Rightarrow m=2$. **24.** $\begin{vmatrix} 3 & m+5 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \\ -6 & 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow$ $m^2+10m+16\neq 0 \Rightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-8\}$. **25.** a) $x+y-4=0$; b) $C\in AB \Leftrightarrow -1+5-4=0$, adevărat; c) $3m^2-1+2m-4=0 \Rightarrow m\in\left\{1,-\frac{5}{3}\right\}$. **26.** $\begin{cases} a+9b+6=0 \\ -a+3b+6=0 \end{cases} \Rightarrow a=3,\ b=-1$.

27. $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ m & m & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow 9m+9\neq 0 \Rightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **28.** a) $C_4(4,-4)$, $C_2(2,-2)$, $x+y=0$;

b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ n & -n & 1 \\ n+1 & -n-1 & 1 \end{vmatrix}=0$; c) $S=\frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$. **29.** $A_n(-n,2n)$, $B_n(-n,2n)$.

a) $y=-2x$; c) $A_n\in d$; $d: y+2x=0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. **30.** a) 3; b) 8; c) $\frac{13}{2}$.

31. $S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ADC}$. **32.** $C(3,0)$, $S=3$. **34.** $m\in\{-1,13\}$. **36.** $A_{BCD}=|4x-2|$, $A_{ABC}=10$. Se obţine $x\in\{3,-2\}$. **37.** $C(2y-6,y)$. Se obţine $y\in\{5,13\}$.

38. Intersecţiile dreptelor sunt punctele $A\left(\frac{2}{3};3\right)$, $B\left(\frac{1}{7},\frac{10}{7}\right)$, $C\left(\frac{7}{5},\frac{4}{5}\right)$. **39.** a) Punctele sunt pe dreapta $y=2x$; c) 2^{n-1}. **40.** a) $y=2x+1$; b) $\frac{1}{2}$; c) Se arată că $\begin{vmatrix} n & 2n+1 & 1 \\ m & 2m+1 & 1 \\ p & 2p+1 & 1 \end{vmatrix}=0$, $\forall m,n,p\in\mathbb{N}$. **41.** a) 13; b) $y+2=0$; c) $a=-2$. **42.** a) $x-y=0$; b) 1;

c) $A=\frac{1}{2}|(m-n)(n-p)(p-m)|\in\mathbb{N}$, deoarece cel puţin o diferenţă este număr par.

43. a) $y=x+2$; c) $A=1$. **44.** a) $B(0,2)$; b) $y=2x-$; c) $A=5$.

Scanned with OKEN Scanner

45. a) $\det(M)=-x-y+3$; c) $A=\frac{3n}{2}\Rightarrow n=1$.

III. Sisteme de ecuaţii liniare

3.1 Matrice inversabile. Ecuaţii matriceale

1. a) $\det(A)=8\neq 0$; b) $\det(B)=1\neq 0$; c) $\det(C)=6$; d) $\det(D)=5$; e) $\det(E)=44$.

2. Se arată că matricele au determinantul egal cu zero. **3.** a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 8\end{pmatrix}$; b) $\frac{-1}{8}\begin{pmatrix}-8 & -\frac{2}{3}\\ -6 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$;

c) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & 1 & 5\\ -1 & 1 & -1\\ -13 & 1 & -7\end{pmatrix}$. **4.** a) $\det(A)=2m-8\neq 0\Rightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$;

b) $2m+4\neq 0\Rightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$; c) $4m-26\neq 0\Rightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{13}{2}\right\}$; d) $3m+18\neq 0\Rightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-6\}$.

5. a) Trebuie ca $\det(A)=1$. Rezultă că $-3m^2+m+5=1\Rightarrow m\in\left\{-1,\frac{4}{3}\right\}$. **6.** Se pune condiţia

ca $\det(A)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. a) $x^2-4x-5m-2\neq 0\Rightarrow\Delta=20m+24<0\Rightarrow m<-\frac{6}{5}$;

b) $-x^2-x-m-3\neq 0\Rightarrow\Delta<0\Rightarrow m>-\frac{11}{4}$. **7.** a) $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$;

b) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. **8.** a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$; b) $B^2=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$;

$B^2+A^{-1}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}=6I_2$. **9.** a) $A\cdot B=I_3\Rightarrow A^{-1}=B$ şi $B^{-1}=A$;

b) $X=B^{-1}\cdot C=AC=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & 5\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ 3 & 4 & 5\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

10. a) $M(1,1)=I_2+A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\left(M(1,1)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -4 & 3\end{pmatrix}$;

b) $M(x,y)=\begin{pmatrix}x+2y & -y\\ 4y & x-2y\end{pmatrix}\Rightarrow\left|M(x,y)\right|=x^2$. Rezultă că $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $y\in\mathbb{R}$.

11. a) $\det(A)=0$; b) $\det(A+2I_2)=6$. **12.** a) $\det(A)=0$;

b) $B\cdot B^{-1}=(A-I_3)\cdot\left(\frac{1}{9}A-I_3\right)=\frac{1}{9}A^2-\frac{10}{9}A+I_3=I_3$, deoarece $A^2=10A$.

13. a) $\det(A^2)=(\det(A))^2=4$; b) $B=A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; c) $S=(A-A)^2=O_2$.

14. a) $X=\begin{pmatrix}4 & -7\\ 5 & -9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -7\\ 5 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$; b) $X=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $X=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. **15.** a) $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 7\\ -3 & 8\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 7\\ -3 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

16. a) $X=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ 4 & 2 & -6\end{pmatrix}$.

17. a) $X=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -18\\ 2 & 7\end{pmatrix}$;

b) $X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$. **18.** a) $\det(A)=a-2=0\Rightarrow a=2$; b) $A\cdot A^{-1}=I_2$, $A^{-1}\cdot A=I_2$;

c) $X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 5\end{pmatrix}$.

3.2 Sisteme de ecuații liniare

19. a) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$; c) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

20. a) $\begin{pmatrix}2 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}$, $x=-1$, $y=-\frac{3}{2}$; b) $x=1$, $y=4$; c) $x=2$, $y=3$;

d) $x=2$, $y=3$. **21.** a) $x=-1$, $y=-1$, $z=5$. **24.** a) $x=1$, $y=1$, $z=1$;

b) $x=-2$, $y=0$, $z=2$; c) sistem incompatibil. **25.** a) $-5m-2=-12\Rightarrow m=2$; b) $m=2$;

c) $x=4$, $y=8$, $z=-6$. **26.** a) $m=3$; b) $\det(A)=m^2-3m\Rightarrow m^2-3m=-5m+15\Rightarrow$

$\Rightarrow m\in\{-5,3\}$; c) $x=0$, $y=3$, $z=1$. **27.** a) $x=0$, $y=1$, $z=0$; b) calcul direct;

c) $x=0$, $y=1$, $z=0$. **28.** a) $\det(A)=14-2a$; b) $x=-2$, $y=-3$, $z=15$; c) $x_0=0$,

$y_0=\frac{b-5}{5}$, $z_0=\frac{15+2b}{5}$, $b=\frac{10}{3}$. **29.** a) 0; b) Din a doua ecuație se obține $a=-8$, iar din a

treia $a=10$, fals; c) Din $x_0+4(y_0+z_0)=15\Rightarrow x_0+12=15\Rightarrow x_0=3$. Se scade a doua ecuație

și a treia ecuație. Rezultă că $(a+2)y+(a+2)z=6\Rightarrow (a+2)(y+z)=6\Rightarrow$

$3(a+2)=6\Rightarrow a=0$ și $y=2$, $z=1$. **30.** b) $\det(A)\neq 0\Rightarrow -5m+15\neq 0\Rightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$;

c) $x=0$, $y=3$, $z=1$. **31.** a) $\det(A)=-5$; b) $x=y=\frac{4}{5}$, $z=\frac{3}{5}$;

c) $x=\frac{9a}{5}-1\in\mathbb{N}\Rightarrow a=5k\Rightarrow$ a minim pentru $k=1$. **32.** a) calcul direct;

b) $a^2-6a+5=0\Rightarrow a\in\{1,5\}$; c) $x=1$, $y=0$, $z=0$. **33.** b) $\det(A)=-a+4\neq 0\Rightarrow$

$\Rightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$; c) sistem Cramer omogen, $z=y=z=0$. **34.** a) 6;

b) $\det(A)=2(a-2)(a-4)\neq 0\Rightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{2,4\}$; c) sistem omogen de tip Cramer,

$x=y=z=0$. **35.** a) $\det(A)=4a+10\neq 0\Rightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{2}\right\}$; c) $x=2$, $y=3$, $z=-1$.

Scanned with OKEN Scanner

Elemente de analiză matematică

I. Limite de funcţii

1.1. Mulţimi de puncte pe dreapta reală

1. a) $A=(-\infty,2)$; b) $A=[-1,3]$; c) $A=[2,3,4]$; d) $A=(-\infty,-6)\cup(-2,+\infty)$ nu este interval. **2.** a) $A=(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$, $B=[1,+\infty)$, $C=[-3,1)$, $D=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

3. $\frac{x+2}{x-1}>4\Leftrightarrow\frac{x+2}{x-1}-4>0\Leftrightarrow\frac{-3x+6}{x-1}>0\Leftrightarrow\frac{x-2}{x-1}<0\Leftrightarrow(x-1)(x-2)<0\Leftrightarrow x\in(1,2)$.

5. a) $2\le x<5$; b) $x\le-\frac{1}{2}$; c) $x\ge-1$. **6.** Intervalul $[a,b]$ sau (a,b) este simetric dacă $a+b=0$. a) $x-5=0\Rightarrow x=5$; b) $2x-3+4=0\Rightarrow x=\frac{-1}{2}$; c) $-x^2+2x-1=0\Rightarrow x=1$ $\Rightarrow I=[-1,1]$; d) $\frac{5-7x}{x+1}+\frac{3x-5}{x-2}=0\Rightarrow x=3$, $x=\frac{5}{4}$. Pentru $x=3\Rightarrow I=[-4,4]$, iar $x=\frac{5}{4}\Rightarrow I=\left[-\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right]$. **7.** $4\le x^2\le25\Rightarrow x\in\big((-\infty,-2]\cup[2,+\infty)\big)\cap[-5,5]=[-5,-2]\cup[2,5]$.

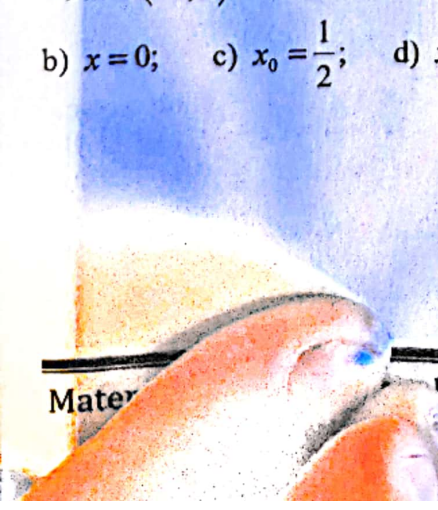
8. a) $-4x+3\le2x-9\Rightarrow x\ge2$; b) $x^2-1<3\Rightarrow x\in(-2,2)$; c) $x<\frac{1}{x}\Rightarrow0<\frac{1-x^2}{x}\Rightarrow$ $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$; d) $2^{x+1}\le8^x\Rightarrow x+1\le3x\Rightarrow x\ge\frac{1}{2}$. **9.** $\frac{2m-5+4m-3}{2}=2\Rightarrow m=2$.

10. a) $-3\le x\le4$ şi $-2\le y\le3\Rightarrow-3-2\le x+y\le4+3\Rightarrow-5\le x+y\le7$; b) $0\le x^2\le16$ şi $0\le y^2\le9\Rightarrow0\le x^2+y^2\le25$. **11.** a) $m\in(-\infty,-5]$, $M\in[8,+\infty)$; b) $m\in(-\infty,-2]$, $M\in[2,+\infty)$; c) $m\in(-\infty,3]$, $M\in[7,+\infty)$; d) $m\in(-\infty,-1]$, $M\in[3,+\infty)$; e) $\in(-\infty,0]$ şi mulţime nemărginită superior; f) mulţime nemărginită şi inferior şi superior.

12. a) $A=\{-2,3\}$, $\inf A=-2$, $\sup A=3$; b) $A=(0,5)$, $\inf A=0$, $\sup A=5$; c) $A=(2,6)$, $\inf A=2$, $\sup A=6$; d) $A=(0,3]$, $\inf A=0$, $\sup A=3$. **13.** $A=(-\infty,4]$.

14. $A=(-1,1)$. **15.** a) $A=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$; b) $A=\{5m\mid m\in\mathbb{Z}\}$; c) $A=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$; d) $A=(10,+\infty)$. **16.** a) $A=[-6,6]$; b) $A=\left(-3,\frac{1}{3}\right)$; c) $A=\left(\frac{1}{2},2\right)\cap\mathbb{Z}=\{1\}$; d) $A=[-3,2)$.

17. Toate sunt vecinătăţi pentru $x=1$. **18.** a) şi b). **19.** a), b), d). **20.** $\log_3 2<2<\log_3 11$ deoarece $2<9<11$. **21.** a) $m+1<-1<2m+7\Rightarrow m\in(-4,-2)$; b) $m^2-2m<3\Rightarrow$ $\Rightarrow m\in(-1,3)$. **22.** $m^2-3m<m<m+5\Rightarrow m^2-4m<0\Rightarrow m\in(0,4)$. **23.** a) $x_0\in\{-2,3\}$; b) $x=0$; c) $x_0=\frac{1}{2}$; d) $x\in\{-1,1\}$.



Scanned with OKEN Scanner

25. a) Fie $V=(-14-\varepsilon,-14+\varepsilon)$ şi $f(x)=1-5x$. Din condiţia $f(x)\in V$, $\forall x\in U\Rightarrow$ $-14-\varepsilon<1-5x<\varepsilon-14\Rightarrow 15-\varepsilon<5x<15+\varepsilon\Rightarrow 3-\frac{\varepsilon}{5}<x<3+\frac{\varepsilon}{5}$. Se ia $U=\left(3-\frac{\varepsilon}{5},3+\frac{\varepsilon}{5}\right)\in V(3)$. Se obţine că $f(x)\in V$, $\forall x\in U$, deci $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=-14$.

26. a) $-2(2a+1)+1=3\Rightarrow a=-1$; b) $2^{a+1}=64\Rightarrow a+1=6\Rightarrow a=5$. **27.** a) $f(1-0)=4$, $f(1+0)=6$; b) $f(2-0)=4, f(2+0)=4$; c) $f(0-0)=-1, f(0+0)=2$; d) $f(1-0)=0$, $f(1+0)=0$. **28.** a) $f(-1-0)=-3, f(-1+0)=-3$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-3$; b) $f(-2-0)=-4$, $f(-2+0)=-4$, $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=-4$; c) $f(4-0)=1, f(4+0)=2$, nu există limită; d) $f(\pi-0)=1$, $f(\pi+0)=1$, există limită. **29.** a) $f(1-0)=-\infty, f(1+0)=+\infty$; b) $f(-2-0)=+\infty, f(-2+0)=-\infty$. **30.** a) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\frac{1}{3}$; $f(2-0)=+\infty, f(2+0)=-\infty$, $f(-2-0)=+\infty, f(-2+0)=-\infty$; b) $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\frac{1}{12}, f(-3-0)=f(-3+0)=-\infty$.

31. a) $f(2-0)=4-a, f(2+0)=5$. Din $4-a=5\Rightarrow a=-1$; b) $f(-1-0)=-a+1$, $f(-1+0)=2$. Din $-a+1=2\Rightarrow a=-1$; c) $f(1-0)=-3, f(1+0)=a-1\Rightarrow a=-2$; d) $f(1-0)=\log_2 a+3$, $f(1+0)=6$. Din $\log_2 a+3=6\Rightarrow a=8$. **32.** a) 3; b) -1; c) 2010; d) $+\infty$; e) $-\infty$; f) $-\infty$. **33.** a) 6; b) 7; c) $-\frac{10}{3}$; d) $+\infty$; e) $-\infty$; f) $+\infty$.

34. a) $-\frac{4}{5}$; b) 3; c) -1; d) 2; e) -2; f) $\frac{2}{5}$; g) $-\infty$; h) $-\infty$; i) $+\infty$. **35.** a) 8; b) 4; c) 3; d) 1; e) 3; f) -1. **36.** a) ∞; b) 0; c) 0; d) 0; e) $-\infty$; f) $+\infty$; g) ∞; h) $-\infty$. **37.** a) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}+1$; c) $\frac{1}{2}$; d) 3; e) -3; f) $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

38. a) 0; b) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$; c) $\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$; d) $-\pi$. **39.** a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{2}{4}$; c) 0; d) $-\infty$; e) -3; f) $\frac{3}{4}$; g) 0; h) $+\infty$. **40.** a) $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot(x-2)}{x(3x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot(x-2)}{3x+1}=0$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x+2}=\frac{1}{2}$; c) 5; d) $\frac{1}{2}\ln 5$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=\ln 3$; f) $2\ln 2$.

41. a) $\lim\limits_{x\nearrow 0}xe^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to-\infty}\frac{e^y}{y}=0$; b) 0; c) $+\infty$; d) $\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot\frac{1}{x+1}\to 1$; e) 0.

42. a) $1-2=-1$; b) 1; c) 0; d) $l=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x+1)^2}=1$; e) $x^3-3x^2+4=(x-2)^2(x+1)$ şi $x^3-5x^2+8x-4=(x-2)^2(x-1)$. Se obţine $l=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{x-1}=3$. f) $x-4=\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow l=\frac{1}{4}$; g) $x-8=\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)\Rightarrow l=\frac{1}{12}$; h) $x^2+x-2=(x-1)(x+2)=$

$=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)(x+2)\Rightarrow l=6$; i) $\frac{5}{4}$; j) $\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$; k) 2; l) 2.

1.3. Asimptotele funcţiilor

43. a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2\Rightarrow y=2$ este asimptotă orizontală la $\pm\infty$; b) $y=1$; c) $y=-\frac{1}{2}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$ este asimptotă orizontală la $+\infty$; e) $y=0$ la $+\infty$.

44. a) $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=2$, $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-2x\right)=-6\Rightarrow y=2x-6$ asimptotă spre $+\infty$ şi $-\infty$;

b) $y=-5x$; c) $y=x-2$ spre $+\infty$; d) nu există asimptote oblice. **45.** a) $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\searrow 1} f(x)=+\infty\Rightarrow x=1$ este asimptotă verticală bilaterală; b) $x=-2$; c) $x=-2$ şi $x=2$;

d) $x=0$. **46.** a) $x=3$ şi $x=-3$, asimptote verticale, $y=-1$, asimptote orizontale;

b) $x=-1$, asimptotă verticală; $y=2x-2$, asimptoă oblică; c) $x=0$, asimptotă verticală;

d) $x=1$, asimptotă verticală; $y=0$ asimptotă orizontală la $+\infty$; e) $x=e$ asimptotă verticală;

$y=1$ asimptotă orizontală la $+\infty$. **47.** $y=0$. **48.** $y=-x$. **49.** $y=-1$. **50.** $y=0$.

51. $g(x)=\frac{\ln x-1}{2x^2}$, $y=0$. **52.** $y=1$. **53.** $y=0$ asimptotă orizontală. **54.** $y=x+1$.

55. $y=0$. **56.** $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+ax}{x+3}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(a-6)x}{x+3}=a-6$. Din $a-6=-5\Rightarrow a=1$.

57. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{m}{2}$. Din egalitatea $\frac{m}{2}=-1\Rightarrow m=-2$. **58.** $\frac{a}{2}=3\Rightarrow a=6$.

II. Funcţii continue

1. a) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=1; f(4)=1\Rightarrow f$ este continuă în $x=4$. Analog $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\frac{3}{2}-5=-\frac{13}{2}$ şi

$f(-1)=-\frac{13}{2}$ deci f este continuă în $x=-1$; b), c), d) funcţia este continuă.

2. $f(1-0)=0, f(1+0)=1, f(1)=1$, funcţia nu are limită în $x_0=1$, deci este discontinuă în

$x_0=1$. **3.** $f(1-0)=-3, f(1+0)=-3, f(1)=-3\Rightarrow$ funcţie continuă în $x_0=1$.

4. $f(0-0)=1$, $f(0+0)=1, f(0)=1\Rightarrow$ funcţie continuă. **5.** $f(1-0)=f(1+0)=f(1)\Rightarrow$

funcţie continuă. **6.** $f(0-0)=0, f(0+0)=+\infty\Rightarrow f$ discontinuă. **7.** $f(1-0)=0$,

$f(1+0)=0$, $f(1)=0\Rightarrow f$ continuă. **8.** $f(2+0)=4, f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$,

$f(2)=4\Rightarrow f$ continuă. **9.** $f(1-0)=f(1+0)=f(1)=-1$. **10.** $f(0-0)=1$,

$f(0+0)=-1\Rightarrow f$ discontinuă. **11.** $f(0-0)=2, f(0+0)=-\infty\Rightarrow f$ discontinuă în x_0 de

speţa a doua. **12.** a) $f(-2-0)=-\infty, f(-2+0)=0\Rightarrow$ discontinuitate de speţa a doua;

b) $f(1-0)=f(1+0)=2\ln 2$, $f(1)=\ln 2$, prima speţă; c) $f(1+0)=\frac{1}{4}, f(1-0)=\frac{1}{2}$, prima

speţă. **13.** $f(4-0)=4a-6, f(4+0)=2\Rightarrow 4a-6=2\Rightarrow a=2$. **14.** $f(1-0)=f(1+0)\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow 4=a+2\Rightarrow a=2$. **15.** $f(1-0)=f(1+0)\Rightarrow 2=\frac{a+2}{3}\Rightarrow a=4$. **16.** $f(4-0)=f(4+0)\Rightarrow$

$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-a\Rightarrow a=\frac{1}{4}$. **17.** $5+2a=a^2+2\Rightarrow a^2-2a-3=0\Rightarrow a\in\{-1,3\}$. **18.** $1-\frac{\sqrt{3}}{2}=1+a\Rightarrow$

$\Rightarrow a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **19.** $f(1-0)=f(1+0)\Rightarrow -1=a+b$. Din $\lim\limits_{x\nearrow 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\searrow 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow a=2$. Se obţine $a=2$, $b=-3$. **20.** $f(-2)=4\Rightarrow 12-2b+a=4$, iar din

$f(0-0)=f(0+0)\Rightarrow -2=a$ şi $b=3$.

21. a) Avem tabelul de semn:

x	$-\infty$				0			2				$+\infty$
x^3-2x^2	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$

b) Avem tabelul de semn:

x	$-\infty$				$\frac{1}{2}$			3				$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$

22. Se face tabelul de semn pentru funcţiile asociate:

a)

x	$-\infty$			-3		1		4			$+\infty$
$(x-1)(x^2-x-12)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$

Soluţia inecuaţiei $x\in[-3,1]\cup[4,+\infty]$; b) $x\in(-4,0)\cup(4,+\infty)$; d) $x\in(0,3)\cup(4,+\infty)$.

III. Funcţii derivabile

1. a) $f'(x)=5$, $x\in\mathbb{R}$; b) $f'(x)=8x-3$, $x\in\mathbb{R}$; c) $f'(x)=x^2-x+1$, $x\in\mathbb{R}$;

d) $f'(x)=2^x\cdot\ln 2$, $x\in\mathbb{R}$; e) $f'(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$, $x\in\mathbb{R}$; f) $f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$;

g) $f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}$, $x>0$; h) $f'(x)=\cos x$, $x\in\mathbb{R}$; i) $f'(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot\ln\frac{1}{2}$, $x\in\mathbb{R}$;

j) $f'(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x\ln\frac{1}{5}$, $x\in\mathbb{R}$. **2.** a) $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x$;

b) $f'(x)=(x+2)\frac{1}{x}+\ln x$; c) $f'(x)=\sin x+(x-1)\cos x$; d) $f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$;

e) $f'(x)=(2x-3)e^x+(x^2-3x)e^x=(x^2-x-3)e^x$; f) $f'(x)=\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}=\frac{1}{1+\cos x}$;

g) $f'(x)=\frac{5}{(x+2)^2}$; h) $f'(x)=\frac{x^2+6x-3}{(x+3)^2}$; i) $f'(x)=\frac{-5x^2+2x+6}{(x^2+x+1)^2}$.

3. a) $f'(x)=6\cdot(x^2+1)^5\cdot 2x$; b) $f'(x)=\frac{1}{x}$; c) $f'(x)=(3x^2+2)\ln x+(x^2+2)$;

d) $f'(x)=2xe^{x+3}+(x^2-1)e^{x+3}$; f) $f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}+1$; g) $f'(x)=\sqrt[3]{3}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{9x^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{9x^2}}$;

Scanned with OKEN Scanner

i) $f'(x)=\operatorname{tg}^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$. **4.** a) $f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=(2\ln x+1)x$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(2\ln x+1)}{x\ln x}=2$;

c) $x(2\ln x+1)-2x=0\Rightarrow x(2\ln x-1)=0\Rightarrow x=e^{\frac{1}{2}}$. **5.** a) $f'(x)=1+e^{-x}\Rightarrow f(0)+f'(0)=1$;

b) $l=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$. **6.** a) $f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}$; b) $y-0=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=3(x-1)$;

c) $2x+\frac{1}{x^2}=2x+1\Rightarrow x=1$. **7.** a) $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$; b) $l=f'(2)=-1$; c) $f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$.

8. a) $f'(x)=3^x\ln 3-\ln 3$; b) $l=f'(1)=2\ln 3$; c) $f'(x)=0\Rightarrow 3^x=1\Rightarrow x=0$.

9. a) $y-(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y+3=-4(x-1)$; b) $f(2)=4$, $f'(x)=3x^2-2x$, $f'(2)=8\Rightarrow$
$\Rightarrow y-4=8(x-2)$; c) $f(-1)=1$, $f'(-1)=1\Rightarrow y-1=1\cdot(x+1)$. **10.** Panta tangentei în punctul $M(x_0,y_0)$ este $m=f'(x_0)$. a) $f'(x_0)=2\Rightarrow 6x_0-4=2\Rightarrow x_0=1$ şi $M(1,0)$;

b) $f'(x_0)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2}{(x_0+3)^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow(x_0+3)^2=4\Rightarrow x_0\in\{-1,-5\}$. Convine doar $x_0=1$ şi $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

11. a) $f'(2)=7$; b) $f'_s(0)=a$, $f'_d(0)=3\Rightarrow a=3$. **12.** a) $f(0-0)=2=f(0+0)=f(0)\Rightarrow$
f continuă în $x_0=0$; b) $f'_s(0)=a$, $f'_d(0)=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$. **13.** a) $f(0-0)=f(0+0)\Rightarrow 0=a$;

b) $f'_s(0)=1$, $f'_d(0)=1+a\Rightarrow 1+a=1\Rightarrow a=0$; c) $f(-2)=e^{-2}-1$, $f'(-2)=e^{-2}\Rightarrow$
$\Rightarrow y-e^{-2}+1=e^{-2}(x+2)$. **14.** a) $f'(x)=3x^2-4x+1$, $x\in\mathbb{R}$; b) $f''(x)=6x-4\Rightarrow$
$\Rightarrow(3x^2-4x+1)-(6x-4)=2\Rightarrow 3x^2-10x+3=0\Rightarrow x\in\left\{3,\frac{1}{3}\right\}$; c) $m=f'(x_0)\Rightarrow$
$\Rightarrow 5=3x_0^2-4x_0+1\Rightarrow x_0\in\left\{2,-\frac{2}{3}\right\}$. **15.** a) $f'(x)=3x^2-\frac{3}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}^*$; b) $l=f'(1)=0$;

c) $f'(x)=0\Rightarrow x\in\{-1,1\}$, $f'(x)>0$, $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ şi $f'(x)<0$, $x\in(-1,0)\cup(0,1)$.

16. b) $m=f'(1)=0\Rightarrow y+1=0\cdot(x-1)\Rightarrow y=-1$; c) $f'(x)=0\Rightarrow\sqrt[3]{x^2}=\sqrt{x}\Rightarrow x^4=x^3\Rightarrow$
$\Rightarrow x=1\in(0,+\infty)$. Se obţine că $f'(x)>0$, $x\in(1,+\infty)$ şi $f'(x)<0$, $x\in(0,1)$.

17. a) $f'(x)=6x-4$, $f''(x)=6$, $x\in\mathbb{R}$; b) $f'(x)=x^3-2x^2-5x$, $f''(x)=3x^2-4x-5$, $x\in\mathbb{R}$;

c) $f'(x)=\frac{6}{(x+5)^2}$, $f''(x)=\frac{-12}{(x+5)^3}$, $x>0$; d) $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}+2=2\cdot x^{-\frac{1}{2}}+2$,

$f''(x)=-x^{-\frac{3}{2}}$, $x>0$; e) $f'(x)=\ln x+1+\frac{2}{x}$, $f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$, $x>0$; f) $f'(x)=(x^2+3x+1)e^x$,

$f''(x)=(x^2+5x+4)e^x$, $x\in\mathbb{R}$. **18.** a) $f'(x)=(3x+2)e^x$, $f''(x)=(3x+5)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

19. a) $f''(x)=6x-6$, $x_0=1$; b) $f''(x)=\frac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$, $x_0\in\{-1,1\}$. **20.** $f'(x)=2ax+b$,

$f''(x)=2a$. Din $f''(0)=4\Rightarrow a=2$, iar din $f'(1)=3\Rightarrow 2a+b=3\Rightarrow b=-1$, apoi $c=-1$ şi
$f(x)=2x^2-x-1$. **21.** b) $f(x)=(3x^2-x)e^x$. **22.** $x^2+e^x+2x+e^x-2-e^x=e^x+1\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x\in\{1,-3\}$. **24.** b) $\frac{999}{500}$. **25.** a) $l=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2x+1}=\frac{2}{3}$; b) -1; c) $\frac{1}{3}$; d) 0; e) $\ln 2$; f) $\frac{1}{4}$. **26.** a) $\frac{1}{2}$; b) $+\infty$; c) 0; d) $\frac{2}{3}$; e) $-\frac{1}{3}$; f) $\frac{1}{4}$.

IV. Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor

1. a) $f'(x)=3x^2-12x$, $f'(x)=0\Rightarrow x\in\{0,4\}$. Tabelul de variaţie:

x	$-\infty$			0			4			$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$\nearrow$			$\searrow$			$\nearrow$		

b) $f'(x)=3x^2-3$, $f'(x)=0\Rightarrow x\in\{-1,1\}$. Se obţine că f este crescătoare pe intervalele $(-\infty,-1]$ şi $[1,+\infty)$ şi descrescătoare pe $(-1,1)$; c) f descrescătoare pe $(0,1]$ şi crescătoare pe $(1,+\infty)$; d) $f'(x)=\frac{5}{(x+3)^2}\Rightarrow f$ crescătoare pe $(1,+\infty)$; e) $f'(x)=1-\frac{2}{x^2}$; f este crescătoare pe $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]$ şi $\left[\sqrt{2},+\infty\right)$, şi descrescătoare pe $\left[-\sqrt{2},0\right)$ şi $\left(0,\sqrt{2}\right]$;

f) $f'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}\Rightarrow f$ crescătoare pe $(0,2)$ şi descrescătoare pe $[2,+\infty)$;

g) $f'(x)=\ln x+1\Rightarrow f$ crescătoare pe $\left[e^{-1},+\infty\right)$ şi descrescătoare pe $\left(0,e^{-1}\right]$;

h) $f'(x)=1+\cos x\geq 0$, $\forall x\in[0,2\pi]\Rightarrow f$ crescătoare; i) $f'(x)=e^x-1\Rightarrow f$ crescătoare pe $[0,+\infty)$ şi descrescătoare pe $(-\infty,0]$. **2.** a) $f'(x)=3x^2-6x$, $f''(x)=6x-6$. Tabelul de studiu al convexităţii:

x	$-\infty$					1					$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$\cap$						$\cup$			

b) $f''(x)=12x^2-12$; f concavă pe $[-1,1]$ şi convexă pe intervalele $(-\infty,-1]$ şi $[1,+\infty)$;

d) $f''(x)=(x+2)e^x$, f concavă pe $(-\infty,-2]$ şi convexă pe $[-2,+\infty)$.

3. $f'(x)=3x^2-a$ şi $f'(1)=0\Rightarrow a=3$. **4.** $f'(x)=3x^2+2ax+b$ şi $f'(1)=f'(-1)=0\Rightarrow$ $a=0$, $b=-3$. **5.** $f'(x)=\frac{x^2+2x+m}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2+m-1}{(x+1)^2}\geq 0\Rightarrow m\geq 1$. **6.** $f''(x)=6x-2a$, $f(1)=2$ şi $f''(1)=0\Rightarrow 1-a+b=2$ şi $6-2a=0\Rightarrow a=3$, $b=4$. **7.** $f'(x)=2x+\frac{a}{2\sqrt{x}}$, $f''(x)=2-\frac{a}{4x\sqrt{x}}$. Din $f''(1)=0\Rightarrow a=8$. **8.** $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\Rightarrow f$ crescătoare pe $(0,e)$ şi descrescătoare pe $(e,+\infty)$, deci $x=e$ este punct de maxim pentru f. Rezultă că $f(x)\leq f(e)$, $\forall x\in(0,+\infty)$, deci $\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln e}{e}\Rightarrow \ln x^e\leq \ln e^x\Rightarrow x^e\leq e^x$. **9.** Se arată că $f\left(\sqrt{3}\right)\leq f\left(\sqrt{2}\right)$, din

Scanned with OKEN Scanner

monotonia funcției. **10.** $f'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$ și $x=\sqrt{e}$ este punct de maxim $\Rightarrow f(x)\le f\left(\sqrt{e}\right)=\frac{1}{2e}$. **13.** $f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. Funcția este descrescătoare pe $(1,2)$. Din $\sqrt[3]{2}<\sqrt[3]{3}\Rightarrow f\left(\sqrt[3]{2}\right)>f\left(\sqrt[3]{3}\right)$. **15.** a) $f'(x)=e^x+e^{-x}$, $l=f'(0)=2$; b) $f'(x)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ crescătoare pe $\mathbb{R}$; c) $g(x)=2e^{-x}$ și S este o progresie geometrică. Se obține $S=2\frac{1-e^{-2009}}{1-e^{-1}}$. **17.** a) $f'(x)=1-e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$; b) $f'(x)=0\Rightarrow x=0$ și $f'(x)\le 0$, $\forall x\in(-\infty,0]$ și $f'(x)\ge 0$, $\forall x\in[0,+\infty)$. **18.** a) 1; b) $y-2=0$; c) $f''(x)=2011\cdot 2010\cdot x^{2009}$. **20.** a) $l=f'(1)=e+2$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+x^2}{x}=+\infty$; c) $f'(x)=e^x+2x$, $f''(x)=e^x+2\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. **22.** a) $f(1+0)=1=f(1-0)=f(1)$, funcție continuă; b)-12; c) $f'(x)=\begin{cases}4x-1, & x>1\\ -2x+1, & x<1\end{cases}$, $f''(x)=\begin{cases}4, & x>1\\ -2, & x<1\end{cases}\Rightarrow f$ concavă pe $(-\infty,1)$ și convexă pe $(1,+\infty)$. **24.** b) $y=0$ asimptota orizontală la $-\infty$ și $x=-1$ asimptota verticală; c) $x+1<0\Rightarrow f(x)<0$. **25.** a) $f_1(x)=-e^{-x}$; b) $y=-1$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-e^{-x}+1}{2x}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}$. **26.** b) $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{x-1}=2$. Asimptota este $y=x+2$; c) $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x^2+x+1}{x(1-x)}\Rightarrow f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(x+1)^3}{x(x-1)}>0$, $\forall x\in(1,+\infty)$. **27.** b) $m=f'(1)=0\Rightarrow y+2=0\cdot(x-1)\Rightarrow y=-2$; c) Din $f'(x)=0\Rightarrow x=1$. Funcția este crescătoare pe $(1,\infty)$ și descrescătoare pe $(0,1]$, iar $x=1$ este punct de minim. Rezultă că $f(x)\ge f(1)\Rightarrow(x-3)\sqrt{x}\ge -2\Rightarrow x+\frac{2}{\sqrt{x}}\ge 3$. **28.** b) $y=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0\Rightarrow y=0$ asimptotă orizontală la $-\infty$; c) f crescătoare pe $(-\infty,3)$, deci $f(-4)\le f(-3)$ și f descrescătoare pe $(-3,-1)$, deci $f(-2)\le f(-3)$ Așadar $f(-2)+f(-4)\le 2f(-3)=\frac{8}{e^3}$. **29.** a) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$, $x>0$; b) $m=f'(1)=0\Rightarrow y=2$; c) $f'(x)=0\Rightarrow x=1$. Se arată că $x=1$ este punct de minim. Atunci $f(x)\ge f(1)\Rightarrow 2\sqrt{x}-\ln x\ge 2$. **30.** b) $y=1$; c) Folosiți monotonia funcției f. **31.** b) $y=0$; c) $x=1$ este punct de minim $\Rightarrow f(x)\ge f(1)$. **33.** a) $f(1-0)=3$ și $f(1+0)=0$; funcția este discontinuă; b) $l=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x+1}=0$; c) $f\left(e^{x^k}\right)=\ln e^{x^k}=x^k\Rightarrow\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+x^2+\ldots+x^{2011}}{x^{2011}}=1$.

CLASA A a-XII-a

Scanned with OKEN Scanner

I. Grupuri

1. a) Legea "$\circ$" este comutativă dacă $x\circ y=y\circ x,\ \forall x,y\in M$. Avem că $x\circ y=3x+3y-xy=$ $=3y+3x-yx=y\circ x,\ \forall x,y\in M$. Rezultă că legea "$\circ$" este comutativă; c) Legea este comutativă dacă $A(x)\cdot A(y)=A(y)\cdot A(x),\ \forall A(x),A(y)\in M$. Avem: $A(x)\cdot A(y)=$ $=\begin{pmatrix}1 & y+x\\ 0 & 1\end{pmatrix}=A(y+x)=A(x+y)=A(y)\cdot A(x)$. **2.** a) Legea "$\circ$" este asociativă dacă $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{Z}$. Verificăm egalitatea prelucrând simultan cei doi membrii. Avem: $(x\circ y)\cdot z-3(x\circ y)-3z+12=x(y\circ z)-3x-3(y\circ z)+12\Leftrightarrow(xy-3x-3y+12)\cdot z-$ $-3(xy-3x-3y+12)-3z+12=x(yz-3y-3z+12)-3x-3(yz-3y-3z+12)+12\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow xyz-3xz-3yz-3xy+9x+9y+9z-24=xyz-3xy-3xz-3yz+9x+9y+9z-24$, egalitate adevărată pentru orice $x,y,z\in\mathbb{Z}$. **3.** a) Se studiază dacă există $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $e\circ x=x\circ e=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Prelucrând aceste egalităţi se obţine că $e+x+3ex=x+e+3xe=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Rezultă că $e=0$. $U(M)\{x\in M\mid\exists x'\in M$ a.î. $x\circ x'=x'\circ x=e\}$. Din $x\circ x'=x'\circ x=0$ se obţine $x+x'+3xx'=0$ şi $x'(1+3x)=-x$. Rezultă că $x'=\dfrac{-x}{1+3x}$, pentru $1+3x\neq0$. Aşadar $U(M)=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$; b) $e=5,\ U(M)=\mathbb{Z};\ x'=10-x,\ \forall x\in\mathbb{Z}$; c) $e=0;\ x'=-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$; $U(\mathbb{R})=\mathbb{R}$; d) $u=\sqrt{e}$ (elementul neutru); $x'=e^{\frac{1}{4\ln x}},\ x\in M;\ U(M)=M$; e) $e=5$, $x'=\dfrac{4x-15}{x-4}=4+\dfrac{1}{x-4}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{3,5\}=U(\mathbb{Z})$. **4.** c) Din b) se obţine că $x\circ3=3\circ x=3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Rezultă că $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{9}\circ\sqrt{2011}=1\circ\sqrt{2}\circ\ldots\circ3\circ\ldots\circ\sqrt{2011}=3$. **5.** c) Se foloseşte că $x\circ2=2,\ \forall x\in\mathbb{R}$, deci rezultatul compunerii este 2 deoarece un termen al compunerii este 2. **6.** a) $e=5$; b) $x\circ x=(x-4)^2+4$; $x\circ x\circ x=(x-4)^3+4$. Se obţine ecuaţia $(x-4)^3=x-4\Leftrightarrow(x-4)\left[(x-4)^2-1\right]=0$. Se obţin soluţiile $x\in\{3,4,5\}$. c) Luăm, de exmplu, $a=\dfrac{2}{3}$. Căutăm pe b astfel încât $\dfrac{2}{3}\circ b=10$. Se obţine $b=\dfrac{11}{5}$. Aşadar $\dfrac{2}{3}\circ\dfrac{11}{5}=10\in\mathbb{N}$. Faceţi alte alegeri!. **7.** a) Se poate pleca de la $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$ şi efectuând calculele se obţine scrierea din ipoteză; b) Se calculează elementul neutru şi se obţine $e=-1$. Simetricul lui (-3) este x' cu proprietatea $(-3)\circ x'=x'\circ(-3)=-1\Leftrightarrow-3x'+2x'-6+2=-1\Leftrightarrow x'=-3$; c) Se obţine sistemul $x^2+y^2=5$ şi $x^2y^2+2\left(x^2+y^2\right)=14$. Substituind pe $x^2+y^2=5$ şi $x^2\cdot y^2=4$. Formăm ecuaţia de gradul doi când se cunosc suma 5 şi produsul 4 ale soluţiilor ei notate x^2,y^2. Se obţine $t^2-5t+4=0$ cu $t_1=1,\ t_2=4$. Aşadar, $x^2=1,\ y^2=4$ sau $x^2=4$, $y^2=1$. Rezultă $x=\pm1,\ y=\pm2$ sau $x=\pm2,\ y=\pm1$. Soluţiile sistemului: $(1,2),(1,-2),(-1,2),(-1,-2),(2,1),(2,-1),(-2,1),(-2,-1)$ **8.** a) $(x\circ y)\circ z=\sqrt[3]{(x\circ y)^3+z^3-1}=$ $=\sqrt[3]{\left(\sqrt{x^3+y^3-1}\right)^3+z^3-1}=\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3-2}$. Analog se calculează $x\circ(y\circ z)$; b) $e=1$. Prin calcul se obţine $\sqrt[3]{-6}$. **9.** b)

Scanned with OKEN Scanner

$A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(a)=A\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot a\right)=A(a)$; $A(a)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)=A\left(2\cdot a\cdot\frac{1}{2}\right)=$ $=A(a)$. Aşadar $A\left(\frac{1}{2}\right)$ este element neutru; c) Fie $A(a)$ elementul simetric al matricei $A(1)$. Rezultă că

$A(a)\cdot A(1)=A(1)\cdot A(a)=A\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow A(2a)=A\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow 2a=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{4}$ şi $A(a)=A\left(\frac{1}{4}\right)\in M$.

10. a) Ecuaţia se scrie succesiv: $x+x-3=(x-3)^2+3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-3=x^2-6x+12\Leftrightarrow x^2-8x+15=0$, cu soluţiile $x_1=3$, $x_2=5$;

b) $(x-3)(a-3)+3=3$, $\forall x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow(x-3)(a-3)=0$, $\forall x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow a=3$; c) Sistemul se scrie: $x+y-2=4$ şi $x-y-3=-1$ cu soluţia $x=4$, $y=2$. **11.** b) $\left(x^2-5\right)\circ 6=-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2-5+1\right)(6+1)-1=-1\Leftrightarrow 21\left(x^2-4\right)=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x\in\{-2,2\}$; c) Să găsim $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$. Fie $a\circ b=5\Rightarrow 3(a+1)(b+1)-1=5\Rightarrow(a+1)(b+1)=2$. Se pot face diverse alegeri. De exemplu, pentru $a+1=\frac{7}{3}\Rightarrow b+1=\frac{6}{7}$ şi $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{7}$.

12. b) Ecuaţia se scrie succesiv: $(x+x+1+3)+x(x+1)-3(x+x+1)+12=11\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$, cu soluţiile $x\in\{1,2\}$; c) Avem sistemul: $x+y=-2$ şi $y=x$. Se obţine $x=y=-1$.

13. a) Se obţine ecuaţia $-4x+2x+8-2=10$ cu soluţia $x=-2$; b) Se obţin egalităţile: $-xa+2x+2a-2=-ax+2a+2x-2=a$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Rezultă că $-xa+a=2-2x$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(1-x)=2(1-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Se obţine $a=2$; c) Din b) avem că $x*2=2*x=2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Dar $\frac{4018}{2009}=2$ şi deci rezultatul calculului este 2. **14.** a) $e=6$; b) $2\circ\frac{16}{3}=4$. Simetricul lui $x=4$ este $x'=4$. **15.** b) Din $x*(-6)=(-6)*x=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ rezultă $x-6+m=-6+x+m=x$ şi $m=6$; c) Se obţine $4m-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ şi $m=\sqrt{2}$. **16.** a) Se verifică axioma asociativităţii şi axioma elementului neutru şi axioma comutativităţii; b) Din $x,y\in\mathbb{N}^*\Rightarrow x\geq 1$, $y\geq 1\Rightarrow$

$\Rightarrow x-1\geq 0$, $y-1\geq 0\Rightarrow(x-1)(y-1)\geq 0$ şi $(x-1)(y-1)+1\geq 1$. Aşadar $x*y=(x-1)(y-1)+1\in\mathbb{N}^*$; c) $x\circ a=a$, $\forall x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow xa-x-a+2=a$, $\forall x\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x(a-1)-2(a-1)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(x-2)(a-1)=0$, $\forall x\in\mathbb{Z}$. Se obţine $a-1=0$, deci $a=1$.

17. a) Axioma asociativităţii: $(x\circ y)\circ z=(x\circ y)^{\ln\sqrt[3]{z}}=\left(x^{\ln\sqrt[3]{y}}\right)^{\ln\sqrt[3]{z}}=x^{\ln\sqrt[3]{y}\cdot\ln\sqrt[3]{z}}$ (1). Analog,

$x\circ(y\circ z)=x^{\ln\sqrt[3]{y\circ z}}=x^{\ln\sqrt[3]{y^{\ln\sqrt[3]{z}}}}=x^{\frac{1}{3}\cdot\ln\sqrt[3]{z}\cdot\ln y}=x^{\ln\sqrt[3]{y}\cdot\sqrt[3]{z}}$ (2). Din (1) (2) se obţine asociativitatea.

Axioma elementului neutru: $\exists u\in M$ astfel încât $x\circ u=u\circ x=x$, $\forall x\in M$. Din $x\circ u=x\Rightarrow x^{\ln\sqrt[3]{u}}=x\Rightarrow\ln\sqrt[3]{u}=1\Rightarrow\sqrt[3]{u}=e\Rightarrow u=e^3\in M$. Din $u\circ x=x\Rightarrow u^{\ln\sqrt[3]{x}}=x\Rightarrow$

$\Rightarrow\ln\left(u^{\ln\sqrt[3]{x}}\right)=\ln x\Rightarrow\ln\sqrt[3]{x}\cdot\ln u=\ln x\Rightarrow\frac{1}{3}\ln x\ln u=\ln x\Rightarrow\ln u=3$ şi $u=e^3\in M$; b) $x'=e^9$.

1'. a) $k=0$; b) $e=0$; c) $-\frac{1}{2}\circ 4=\frac{3}{2}$ şi simetricul elementului $\frac{3}{2}$ este $-\frac{3}{5}$. **20.** a) $x\circ e=8\Leftrightarrow x^{3\ln e}=8\Leftrightarrow x^3=8\Leftrightarrow x=2$; b) Din $x,y\in(0,\infty)\setminus\{1\}\Rightarrow x\circ y=x^{3\ln y}\in(0,\infty)$. Presupunem că $x\circ y=1\Rightarrow x^{3\ln y}=1\Rightarrow x=1$ sau $3\ln y=0\Rightarrow x=1$ sau $y=1$, ceea ce contrazice

Scanned with OKEN Scanner

$x, y \neq 1$. Aşadar, $x \circ y \in (0,+\infty)\setminus\{1\}$. **21.** a) 1; b) $3^{2x+x^2} = 3^3 \Rightarrow x^2+2x-3=0$, $x \in \{-3,1\}$;

c) Avem $3^{x+y} \circ z = 3^{z+1} \Leftrightarrow 3^{3^{x+y}+z} = 3^{z+1} \Leftrightarrow 3^{x+y}+z = z+1 \Leftrightarrow 3^{x+y} = 1 \Rightarrow x+y=0$. **22.** a) x;

c) $x_1 = x_0\sqrt[3]{2}$; $x_2 = x_0\sqrt[3]{3}$; $x_3 = x_0\sqrt[3]{4} \notin \mathbb{Q}$. **23.** a) $2*3=2 \Leftrightarrow 6-5k+k^2+k=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2-4k+4=0 \Leftrightarrow (k-2)^2=0 \Leftrightarrow k=2$; b) $x*x=6 \Leftrightarrow x^2-4x+6=6 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \{0,4\}$; c) Din $x, y \in [k,+\infty) \Rightarrow x \geq k$, $y \geq k \Rightarrow$ $x-k \geq 0$, $y-k \geq 0$.

$x*y \in M \Leftrightarrow xy-k(x+y)+k^2+k \geq k \Leftrightarrow xy-kx-ky+k^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-k)(y-k) \geq 0$, adevărată pentru oricare $x, y \in [k,+\infty)$. **24.** a) Se alcătuieşte tabla operaţiei:

$+$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{0}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$
$\hat{6}$	$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$

- adunarea este asociativă pe $\mathbb{Z}_8$, deci şi pe $M \subset \mathbb{Z}_8$;
- elementul neutru este $\hat{0}$;
- fiecare element din M are un simetric $\hat{0}' = \hat{0}$, $\hat{2}' = \hat{6}$, $\hat{4}' = \hat{4}$, $\hat{6}' = \hat{2}$. Rezultă că $(M,+)$ este grup.

25. b) • Asociativitatea:

$[A(x)\cdot A(y)]\cdot A(z) = A(x)\cdot[A(y)\cdot A(z)]$, $\forall A(x), A(y), A(z) \in G \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A((xy)z) = A(x(yz))$, $\forall A(x), A(y), A(z) \in G$;

- Comutativitatea: $A(x)A(y) = A(y)\cdot A(x)$, $\forall A(x), A(y) \in G$;
- Axioma elementului neutru:

$\exists A(e) \in G$ a.î. $A(e)\cdot A(x) = A(x)\cdot A(e) = A(x)$, $\forall A(x) \in G$. Se obţine: $A(ex) = A(xe) =$

$= A(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e = 1$ şi $A(e) = A(1) \in G$;

- Axioma elementelor simetrizabile:

$\forall A(x) \in G$, $\exists A(x') \in G$ a.î. $A(x)A(x') = A(x')A(x) = A(1)$. Se obţine

$A(xx') = A(x'x) = A(1)$, de unde $x' = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$. Aşadar, $A(x') = A\left(\frac{1}{x}\right) \in G$.

26. a) Fie $a = x+y\sqrt{5}$, $x, y \in \mathbb{Q}$, $x^2-5y^2=1$ şi $b = u+v\sqrt{5}$, $u, v \in \mathbb{Q}$ şi $u^2-5v^2=1$. Avem că

$ab = (xu+5yv)+(xv+yu)\sqrt{5} = m+n\sqrt{5}$, $m, n \in \mathbb{Q}$ (1). Să arătăm că $m^2-5n^2=1$. Avem:

$m^2-5n^2 = (xu+5yv)^2-5(xv+yu)^2 = x^2u^2+10xuyv+25y^2v^2-5x^2v^2-10xvyu-5y^2u^2 =$

$= x^2(u^2-5v^2)-5y^2(u^2-5v^2) = x^2-5y^2 = 1$ (2). Din (1) şi (2) rezultă că $a \cdot b \in G$.

28. a) Dacă $e=-2$ atunci $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$. Se obţine: $x+e+a = e+x+a = x \Rightarrow$

$\Rightarrow e+a=0 \Rightarrow a = -e = 2$. **29.** a) $e=0$; $x' = -x \in G$; b) Ecuaţia se scrie: $\frac{x+(x+1)}{1+x(x+1)} = \frac{5}{7}$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă succesiv: $7(2x+1)=5(x^2+x+1)\Rightarrow 5x^2-9x-2=0$, cu soluţiile $x_1=-\frac{1}{5}$, $x_2=2$. Deoarece $x\in G$, rămâne soluţia $x=-\frac{1}{5}$. **31.** c) Aplicăm b) şi avem $\left(\frac{\sqrt{1}}{2}\circ\frac{\sqrt{2}}{2}\circ\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\circ\frac{\sqrt{4}}{2}\circ\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\circ\ldots\circ\frac{\sqrt{2011}}{2}\right)=x\circ 1\circ y=(x\circ 1)\circ y=1\circ y=1$. **32.** b) Se foloseşte relaţia $x\circ 8=8$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Rezultatul calculului este 8; c) Compunând succesiv se obţine $(x-8)^4+8=9\Leftrightarrow (x-8)^4=1\Rightarrow x-8=1$ sau $x-8=-1\Rightarrow x\in\{7,9\}$. **34.** a) Trebuie verificat dacă $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$. Avem că: $f(x+y)=2011^{x+y}=2011^x\cdot 2011^y=$ $=f(x)\cdot f(y)$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$; b) f este izomorfism de grupuri dacă este morfism bijectiv de grupuri. Din a) avem că f este morfism. Demonstrăm că f este bijectivă. Funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci este injectivă. Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$. Rezultă ca $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$, deci f este surjectivă. **35.** b) Funcţia f este strict crescătoare pe G, deci injectivă şi $f(G)=\mathbb{R}^*$, deci este surjectivă. Arătăm că f este morfism de grupuri:

- $f(x\circ y)=x\circ y+15=xy+15(x+y)+225$, $\forall\, x,y\in G$;
- $f(x)\cdot f(y)=(x+15)(y+15)=xy+15(x+y)+225$, $\forall x,y\in G$.

Aşadar f este bijectivă şi morfism de grupuri, deci izomorfism.

38. a) $(x*y)*z=x*(y*z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow (ax+y-2)*z=x*(ay+z-2)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$ $a^2x+ay-2a+z-2=ax+ay+z-2-2$, $\forall x,y,z\in\mathbb{Z}$. Se obţine $a=1$. c) Se arată că f este bijectivă şi morfism de grupuri. **39.** b) $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}>0$, $\forall x\in(-\infty,1)$. Rezultă că f este strict crescătoare pe $(-\infty,1)$, deci este injectivă. Din $f(x)=y$ rezultă că $x=\frac{y}{y+1}\in(-\infty,1)$ pentru $\forall y\in(-1,+\infty)$. Rezultă că f este surjectivă. Arătăm că f este morfism de grupuri:

$f(x*y)=\frac{x+y-xy}{1-x-y+xy}$, $x,y\in G_2$; $f(x)\circ f(y)=\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}=$

$=\frac{x(1-y)+y(1-x)+xy}{1-x-y+xy}=\frac{x+y-xy}{1-x-y+xy}=f(x*y)$, $x,y\in G_2$. Aşadar f este bijectivă şi morfism de grupuri, adică este izomorfism de grupuri. **40.** c) $f(x\perp y)=(x\perp y)+2=x+y+3$, $x,y\in\mathbb{Z}$; $f(x)\circ f(y)=f(x)+f(y)-1=x+y+3$, $x,y\in\mathbb{Z}$. Aşadar $f(x\perp y)=$ $=f(x)\circ f(y)$, $x,y\in\mathbb{Z}$, deci f este morfism de grupuri.

41. c) $f(x*y)=\frac{1-(x*y)}{1+(x*y)}=\frac{1-\frac{x+y}{1+xy}}{1+\frac{x+y}{1+xy}}=\frac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y}$; $f(x)\cdot f(y)=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-y}{1+y}=$

$=\frac{1-x-y+xy}{1+xy+x+y}=f(x*y)$, $x,y\in G$. **42.** a) Din $x*y=y*x$, $\forall x,y\in\mathbb{Z}\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$px+y+2=py+x+2,\ \forall x,y\in\mathbb{Z}\Rightarrow p=1$; b) Se obţine succesiv:
$(2x+2)\circ(2x+2)=x^2+2\Leftrightarrow 2x+2+2x+2-2=x^2+2\Leftrightarrow 4x=x^2$ cu soluţiile $x_1=0,\ x_2=4$;
c) Din egalitatea $f(x*y)=f(x)\circ f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{Z}\Rightarrow f(x+y+2)=(3x+q)+(3y+q)-2,$
$\forall x,y\in\mathbb{Z}\Rightarrow 3(x+y+2)+q=3(x+y)+2q-2,\ \forall x,z\in\mathbb{Z}$. Se obţine $q=8$.

43. $m=1,\ n=4$. **46.** c) $f(x+y)=A_{x+y},\ \forall x,y\in\mathbb{Z};\ f(x)\cdot f(y)=A_x\cdot A_y\overset{a)}{=}A_{x+y},\ \forall x,y\in\mathbb{Z}.$
Rezultă că $f(x+y)=f(x)\cdot f(y),\forall x,y\in\mathbb{Z}$, deci f este morfism de grupuri.

II. Inele şi corpuri

2.1. Inele şi corpuri

1. $x*(y\circ z)=-x(y\circ z)+4x+4(y\circ z)-12=-x(y+z-4)+4x+4(y+z-4)-12=$
$=-xy-xz+8x+4y+4z-28$ (1);
$(x*y)\circ(x*z)=(x*y)+(x*z)-4=(-xy+4x+4y-12)+(-xz+4x+4z-12)-4=$
$=-xy-xz+8x+4y+4z-28$; (2);
Din (1) şi (2) se obţine egalitatea cerută.

3. Din $x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$ se obţine $a=-3,\ b=12$. **4.** a) $0_{\mathbb{Z}}=7,\ 1_{\mathbb{Z}}=8$;
b) Din $x*x'=x'*x=8$ şi $x\neq 7$ se obţine $x'=\dfrac{7x-48}{x-7}=7+\dfrac{1}{x-7}\in\mathbb{Z}$. Rezultă că $(x-7)$ divide
1. Se obţine că $x-7\in\{-1,1\}$, deci $x\in\{6,8\}$ şi $U(\mathbb{Z})=\{6,8\}$. **5.** $0_A=1,\ 1_A=e^2$.

9. a) $0_{\mathbb{Z}}=-1,\ 1_{\mathbb{Z}}=0$; b) $x'=\dfrac{-x}{x+1}\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}\Rightarrow x'=-1+\dfrac{1}{x+1}\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}\Rightarrow\ x+1\in\{-1,1\}\Rightarrow$
$\Rightarrow x\in\{-2,0\}$. Suma este -2; c) $x\in\{0,3\}$. **10.** a) $k=42$; b) $0_{\mathbb{Z}}=6,\ 1_{\mathbb{Z}}=7$;
c) $x'=6+\dfrac{1}{x-6}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x-6\in\{-1,1\}\Rightarrow\ x\in\{5,7\}\Rightarrow U(\mathbb{Z})=\{5,7\}$; d) $x=1$.

11. b) $x\circ x=12\Leftrightarrow x^2-6x+12=12\Rightarrow x\in\{0,6\}$; c) Sistemul se scrie: $x-3+y-3=2$ şi
$4(x-y)-3(x-y+4)+12=10\Leftrightarrow x+y=8$ şi $x-y=10\Rightarrow x=9,\ y=-1$.

12. b) Legea "$\circ$" nu are element neutru $\Rightarrow(\mathbb{Z}_5,\circ,*)$ nu este inel; c) $\hat{3}\cdot x\cdot\hat{4}=\hat{3}\Rightarrow$
$\Rightarrow\hat{2}x=\hat{3}\Big|_{\cdot\hat{3}}\Rightarrow x=\hat{4}$; d) Ecuaţia se scrie $\hat{4}x+\hat{1}=x$. Rezultă $\hat{3}x=\hat{4}$ şi $x=\hat{3}$.

13. b) $0_{\mathbb{Z}_6}=\hat{3};\ 1_{\mathbb{Z}_6}=\hat{4}$; c) Se obţine ecuaţia $\hat{2}x^2+\hat{3}x=\hat{2},\ x\in\mathbb{Z}_6$. Verifică $x=\hat{2},\ x=\hat{4}$;
d) Se obţine sistemul de ecuaţii $\hat{5}x-\hat{2}y=\hat{3},\ x+y=\hat{2}$ cu soluţia $x=\hat{1},\ y=\hat{1}$. **14.** b) $x=\hat{0}$;
c) Sistemul este: $x+y-\hat{1}=\hat{0},\ yx+y+y+x+\hat{1}=\hat{1}\Rightarrow x+y=\hat{1},\ yx+x=\hat{0}$. Înlocuind $y=\hat{1}+x$
în a doua ecuaţie se obţine $x^2=\hat{0}$. Se obţine soluţia $x=\hat{0},\ y=\hat{1}$. **15.** a) $0_{\mathbb{Q}}=10;\ 1_{\mathbb{Q}}=11$;
b) $x^2-15x+50=0\Rightarrow x\in\{5,10\}$. **16.** b) Se obţine ecuaţia: $2x^2-8x-3=7$ cu soluţiile
$x_1=5,\ x_2=-1$. **17.** b) $x=4,\ y=3$. **19.** a) Ecuaţia este $\hat{2}x=\hat{2}$ cu soluţiile $x\in\{\hat{1},\hat{4}\}$; b) $\hat{0}$;
c) $(x,y)\in\{(\hat{1},\hat{2}),(\hat{3},\hat{4}),(\hat{5},\hat{0})\}$. **20.** a) $S=\hat{4}$; b) $\hat{1}\cdot\hat{3}\cdot\hat{5}\cdot\hat{7}=\hat{1}$; c) Se aplică regula lui
Cramer. Determinantul sistemului este $d=\begin{vmatrix}\hat{2} & \hat{5}\\ \hat{3} & \hat{2}\end{vmatrix}=\hat{5}$ şi $d^{-1}=5,\ d_1=\hat{3},\ d_2=\hat{4}$ şi $x=d_1\cdot d^{-1}=\hat{7}$,

Scanned with OKEN Scanner

$y = d_2 \cdot d^{-1} = \hat{4}$. **21.** Se pot verifica elementele mulțimii $\mathbb{Z}_n$ dacă satisfac fiecare ecuație, sau se poate folosi descompunerea în factori. a) $(x-\hat{1})(x+\hat{2}) = \hat{0}$, $x \in \mathbb{Z}_4$. Se obțin soluțiile $x_1 = \hat{1}$, $x_2 = \hat{2}$; b) $x = \hat{1}$; c) $(x-\hat{1})(\hat{2}x+\hat{3}) = \hat{0}$, $x \in \mathbb{Z}_5 \Rightarrow x = \hat{1}$; e) $x = \hat{1}$; f) $x_1 = \hat{1}$, $x_2 = \hat{2}$.

22. Se poate folosi regula lui Cramer. a) $x = \hat{1}$, $y = \hat{3}$; b) $x = y = \hat{1}$. **23.** a) $x = \hat{3}$, $y = \hat{1}$; b) $x = \hat{0}$, $y = \hat{3}$. **24.** a) $x, b, c \in \mathbb{Z}_2 = \{\hat{0}, \hat{1}\} \Rightarrow$ există $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ matrice; b) Dacă $X \in A \Rightarrow$

$$X^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ \hat{2}bx & \hat{2}cx & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}.$$ Se arată că $x^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$ în $\mathbb{Z}_2$, deci $X^2 \in \{I_3, O_3\}$.

25. a) A are 25 de elemente; b) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in A$ și $X^2 = \begin{pmatrix} a^2-b^2 & \hat{2}ab \\ -\hat{2}ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{Z}_5$.

Din $X^2 = I_2 \Rightarrow a^2 - b^2 = \hat{1}$ și $\hat{2}ab = \hat{0}$. Pentru $\hat{a} = \hat{0} \Rightarrow b \in \{\hat{2}, 3\}$ și pentru $\hat{b} = \hat{0} \Rightarrow a \in \{\hat{1}, \hat{4}\}$. Se obțin 4 soluții ale ecuației matriceale.

2.2 Inelul polinoamelor cu coeficienți într-un corp comutativ

1. a) $f = X^2 - 2X + 1 + 9X^2 - 6X + 1 = 10X^2 - 8X + 2 \in \mathbb{R}[X]$; d) $f = \hat{4}X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{5}X + \hat{4} \in \mathbb{Z}_6[X]$. **2.** a) Dacă $m - 2 \neq 0$, adică $m \neq 2$, atunci $\text{grad}(f) = 3$. Dacă $m - 2 = 0$, adică $m = 2$, atunci $f = -2X + 1$ și $\text{grad}(f) = 1$; b) Se discută după soluțiile ecuației $m^2 + m - 2 = 0$.

3. a) $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 - 3 = -1$; b) $f(\hat{3}) = \hat{4} + \hat{1} + \hat{2} + \hat{5} = \hat{5}$; c) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 16 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + 12 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 = 9$. **4.** Identificând coeficienții aceloraşi puteri ale lui X din f și g se obțin ecuațiile $4a + b = 2a - b$, $a - b = -2$, $c - 3 = a - c$, cu soluțiile $a = -1$, $b = c = 1$.

5. $m^2 - m = 2$, $-4 = q$, $p + 2 = -5$. Se obține: $m \in \{-1, 2\}$, $q = -4$, $p = -7$.

6. a) $h = X^4 + 2X^3 - 28X^2 - 8X + 96$; b) $a = 2$, $b = -8$. **7.** a) $\hat{3}a + \hat{3}b = \hat{2}$, $\hat{2}a + \hat{3}b = \hat{3}a + \hat{2}b$. Înmulțim prima ecuație cu $\hat{3}^{-1} = \hat{2}$ și sistemul devine: $a + b = \hat{4}$ și $a - b = \hat{0}$. Adunăm ecuațiile și rezultă $\hat{2}a = \hat{4}$, cu soluția $\hat{a} = \hat{2}$, iar $b = \hat{2}$; b) Se obține: $\hat{0} + \hat{4} + \hat{2} + \hat{4} + \hat{0} = \hat{0}$. **8.** a) Se obțin relațiile: $-a + b = 8$, $2a + b = -1$ și soluțiile sunt $a = -3$, $b = 5$, $f = -3X + 5$; b) $f = 4X - 5$.

9. $f = aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. a) $f(1) = a + b + c = 0$; $f(0) = c = 1$; $f(2) = 4a + 2b + c = 5$. Înlocuind pe c în celelalte două ecuații se obține sistemul de ecuații $a + b = -1$, $4a + 2b = 4$ cu soluțiile $a = 3$, $b = -4$ și $f = 3X^2 - 4X + 1$; b) $f = -2X^2 + 5X - 2$.

10. $b = \hat{4}$, $a = \hat{3}$, $f = 2X^2 + \hat{3}X + \hat{4}$. **11.** $f = X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{5}$. **12.** a) $f + g = -3X^2 + X + 2$, $f - g = -3X^2 - 9X + 8$, $2f - 3g = -6X^2 - 23X + 19$; c) $f + g = -2X^2 - 3$, $f - g = 2\sqrt{2}X^3 - 2\sqrt{2}X^2 + 7$, $2f - 3g = 5\sqrt{2}X^3 - (5\sqrt{2} - 1)X^2 + 19$. **13.** a) $f + g = X^3$, $f - g = -X^3 = X^3$, $\hat{2}f - g = -g$; c) $f = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{2}$, $g = -X^3$, $f + g = -X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{3}X +$

Scanned with OKEN Scanner

$+\hat{2}$, $\hat{2}f-g=X^3+\hat{2}X$. **14.** a) $fg=2X^3-5X^2+4X-1$, $f^2-g^2=(X^4-4X^3+6X^2-$
$-4X+1)-(4X^2-4X+1)=X^4-4X^3+2X^2$. **15.** a) $fg=\hat{2}X^2+X-\hat{3}$, $f^2=\hat{1}$,
$g^2=X^2+2X+\hat{1}$; d) $fg=\hat{4}X^4+\hat{4}X^3+3X^2+\hat{3}$, $f^2=X^6+\hat{4}X^5-X^4-X^3+\hat{5}X^2-\hat{5}X+1=$
$=X^6+\hat{4}X^5+\hat{6}X^4+\hat{6}X^3+\hat{5}X^2+\hat{2}X+\hat{1}$, $g^2=\hat{2}X^2+\hat{3}X+\hat{2}$. **16.** a) $q=2X^2+2X+11$,
$r=30$;
b) $q=X^2+2X+12$, $r=63X-25$; c) $q=2X^2+3X+1$, $r=0$. **17.** a) $q=X^2+X$, $r=\hat{2}$;
b) $q=2X^2+2$, $r=\hat{3}$; c) $q=X^2+\hat{4}X+\hat{3}$, $r=\hat{0}$; d) $q=\hat{2}X^2+\hat{2}$, $r=\hat{0}$.
18. Teorema restului $r=f(2)\Rightarrow 0=-2+a\Rightarrow a=2$. **19.** $f(1)=-1\Rightarrow m^2+3m=0\Rightarrow$
$\Rightarrow m\in\{-3,0\}$. **20.** $f(-\hat{3})=\hat{2}\Leftrightarrow f(\hat{2})=\hat{2}\Leftrightarrow \hat{2}a+\hat{2}=\hat{2}\Rightarrow a=\hat{4}$. **21.** $f(-\hat{4})=\hat{1}$,
$f(-\hat{2})=\hat{2}\Leftrightarrow f(\hat{3})=\hat{1}$, $f(\hat{5})=\hat{2}$. Se obţine $\hat{3}a+b=\hat{1}$, $\hat{5}a+b=\hat{4}$. Se scad aceste ecuaţii şi se
obţine $\hat{2}a=\hat{3}\,|\cdot\hat{4}\Rightarrow a=\hat{5}$ şi apoi rezultă $b=\hat{0}$. **22.** $f(2)=25\Rightarrow -4a+b=-11$, $f(1)=4\Rightarrow$
$\Rightarrow -a+b=1$. Se obţine $a=4$, $b=5$. **23.** Restul este $-X(a+10)+b+4=-15X+3$.
Rezultă ecuaţiile $a+10=15$ şi $b+4=3$ cu soluţiile $a=5, b=-1$. **24.** Restul este polinomul nul,
adică $(b+3a-7)X+8-2a=0\Rightarrow b+3a-7=0$ şi $8-2a=0$. Se obţine $a=4, b=-5$.
25. a) $f(5)+g(5)=-2$; b) $g(1)=-5^{2011}-5<0$; c) Din teorema împărţirii cu rest pentru f
şi g, se obţine că $\exists\, q,r\in\mathbb{R}[X]$ astfel că $g=fq+r$, $\text{grad}\, r\le 1$. Fie $r=aX+b$. Pentru
$x=5\Rightarrow g(5)=5a+b=-2$. Pentru $x=7\Rightarrow g(7)=7a+b=2$. Din cele două ecuaţii se obţine
$a=2$, $b=-12$ şi $r=2X-12$.

26. a)

	X^3	X^2	X^1	X^0
$x=2$	1	−6	7	2
	1	−4	−1	0

$\Rightarrow r=0, q=X^2-4X-1$;

c)

	X^3	X^2	X^1	X^0
$x=-\hat{4}=\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

$\Rightarrow r=\hat{1}, q=\hat{2}X^2+\hat{4}X+\hat{2}$.

27. Se arată că restul împărţirii lui f la g este polinomul nul. a) $r=f(3)=0$;
b) $r=f(-2)=0$; d) $r=f(-\hat{2})=f(\hat{3})=\hat{0}$; e) $r=f(-1)=0$. **28.** $g\,|\,f\Rightarrow f(1)=0\Rightarrow$
$\Rightarrow m^2-2m=0\Rightarrow m\in\{0,2\}$. **29.** $a=-3$, $b=1$. **30.** $a=\hat{4}$. **31.** Valoarea polinomului în
numărul indicat trebuie să fie zero. **32.** $f(2)=0\Rightarrow 16m^2+18m-28=0\Rightarrow m\in\left\{-2,\frac{7}{8}\right\}$.
33. $f(\sqrt{2})=0\Rightarrow 2\sqrt{2}+2m-m\sqrt{2}-4=0\Rightarrow m(2-\sqrt{2})=2(2-\sqrt{2})\Rightarrow m=2$.
34. a) $f(-1)=0\Rightarrow m^2-4m+3=0\Rightarrow m\in\{1,3\}$; b) Pentru $m=1\Rightarrow f=X(X+1)^2$ cu
rădăcinile $x_1=0$, $x_2=x_3=-1$. **35.** $f(\hat{2})=\hat{0}\Rightarrow m+\hat{3}=\hat{0}\Rightarrow m=\hat{2}$. **36.** a) $f(\hat{1})=0\Rightarrow$
$\Rightarrow m^2+m+\hat{1}\Rightarrow m=\hat{1}$; b) $f=(X-\hat{1})^2(X+\hat{1})$ cu soluţiile $x_1=x_2=\hat{1}$, $x_3=\hat{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

37. a)

b	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
b^3	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$

Aşadar $b^3 = b,\ \forall b \in \mathbb{Z}_6$;

b) $f(\hat{2}) = \hat{0} \Rightarrow \hat{5}a + \hat{2} = \hat{0}$. Se obţine $a = \hat{2}$; c) Ecuaţia este $x^3 + \hat{5}x = 0,\ x \in \mathbb{Z}_6 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^3 = -\hat{5}x \Rightarrow x^3 = x$. Din a) rezultă că soluţiile ecuaţiei sunt elementele mulţimii $\mathbb{Z}_6$.

38. a) $f(\hat{1}) = \hat{0},\ f(\hat{2}) = \hat{0} \Rightarrow a + b = \hat{2},\ \hat{2}a + b = \hat{2}$. Se obţine $a = \hat{0}, b = \hat{2}$; b) Câtul este $X^2 + X + \hat{1}$ şi restul este $r = \hat{0}$; c) $f(1) = a^3 + a + \hat{1} = a + a + \hat{1} = \hat{2}a + \hat{1}$. S-a folosit că $a^3 = a,\ \forall a \in \mathbb{Z}_3$. **39.** Se aplică repetat schema lui Horner în fiecare caz.

	1	−3	−1	11	−12	4
$\alpha = 1$	1	−2	−3	8	−4	0
$\alpha = 1$	1	−1	−4	4	0	
$\alpha = 1$	1	0	−4	0		
$\alpha = 1$	1	1	−3			

Din verificări, rezultă că rădăcina $\alpha = 1$ are ordinul de multiplicitate egal cu 3. b) $\alpha = -2$ este rădăcină dublă; c) $\alpha = \hat{1}$ este rădăcină dublă. **40.** Fie a rădăcină dublă şi b rădăcina simplă a polinomului asociat ecuaţiei. Rezultă că $(X-a)^2(X-b) = X^3 + 5X^2 + 3X - 9$. Identificând coeficienţii puterilor lui X se obţin ecuaţiile $2a + b = -5,\ a^2 + 2ab = 3,\ ba^2 = 9$. Înlocuind $b = -2a - 5$ în ecuaţia a doua se obţine $3a^2 + 10a + 3 = 0$ cu soluţiile $a_1 = -3,\ a_2 = -\frac{1}{3}$ şi $b_1 = 1, b_2 = -\frac{13}{3}$. Convine $a_1 = -3, b_1 = 1$. **41.** Se aplică schema lui Horner de două ori pentru $x = -3$ rădăcină dublă, punând condiţia ca restul obţinut în fiecare etapă să fie zero. Se obţine: $-9 + 3a + b = 0$ şi $6 - a = 0$ iar $a = 6,\ b = -9$. Câtul împărţirii la $(X+3)^2$ este $X^2 - 1$ cu rădăcinile 1 şi −1. **42.** Se poate proceda ca la 41. sau folosind că $f(-1) = 0$ şi $f'(-1) = 0$. Se obţine $a = b = 4$; $f = (X+1)^2(X^2 - 4X + 4)$. Se obţin soluţiile: $x_1 = x_2 = -1,\ x_3 = x_4 = 2$.

43. a) $f = a(X-2)(X+1)(X-3)$; b) $f = a(X-4)^2(X+2),\ a \in \mathbb{R}^*$;

c) $f = a(X-\hat{3})^2(X-\hat{4}),\ a \in \mathbb{Z}_5^*$. **44.** Rădăcinile întregi se caută printre divizorii termenului liber. a) $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = -3$; b) $x_1 = 2$. **45.** a) Ecuaţia are şi rădăcina $x_2 = -\sqrt{2}$. Se efectuează împărţirea polinomului asociat ecuaţiei la $(X-x_1)(X-x_2)$, obţinând câtul q şi restul zero. Din $q(x) = 0$ se obţin celelalte soluţii: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_3 = 2, x_4 = 1$; b) $x_1 = 1 - \sqrt{3}$, $x_2 = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow$ polinomul asociat $f \vdots (X-x_1)(X-x_2)$. Câtul este $q = X^2 - X - 2$ cu rădăcinile 2 şi −1; c) $x_1 = 3 + \sqrt{2},\ x_2 = 3 - \sqrt{2},\ x_3 = -1$. **46.** Fie f polinomul asociat ecuaţiei algebrice, $f \in \mathbb{Q}[X]$. a) $x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5}$ sunt rădăcini pentru f. Rezultă că $f \vdots (X-\sqrt{5})(X+\sqrt{5}) =$ $= g$, deci restul împărţirii lui f la g este polinomul nul. Se obţine $(5-a)X + b + 30 = 0$, cu $a = 5,\ b = -30$; b) $a = 4, b = -21$. **47.** Se determină soluţiile reale ale ecuaţiilor $f(x) = 0$ şi

Scanned with OKEN Scanner

apoi se dă descompunerea în produs de factori ireductibili a lui f. a) Ecuaţia $f(x)=0$ este bipătrată. Dacă $x^2=y$, se obţine $4y^2-13y+9=0$ cu soluţiile $y_1=1, y_2=\frac{9}{4}$. Se obţine $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm\frac{3}{2}$ şi $f=4(X-1)(X+1)\left(X-\frac{3}{2}\right)\left(X+\frac{3}{2}\right)$;

b) $f=25\left(X-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$; c) $f=(X+1)(4X^2-7X+4)$; d) $f=(X-2)(X^2+2X+4)$.

48. a) $x_1=-1, x_2=2, x_3=\frac{1}{2}$; b) $-1,5,\frac{1}{5}$; c) $2,\frac{1}{2},3,\frac{1}{3}$.

49. a) $a^2-2a-1=2\Rightarrow a^2-2a-3=0$, cu $a_1=-1, a_2=3$; b) $-2,-\frac{1}{2}$. **50.** a) Ecuaţia nu are soluţii întregi. Se caută soluţii raţionale de forma $\frac{p}{q}$ cu $p|1$ şi $q|12$. Se poate proba dacă $x=\frac{1}{2}$ este soluţie. Se obţine descompunerea: $\left(x-\frac{1}{2}\right)(12x^2+2x-2)=0$. Deci soluţiile ecuaţiei vor fi $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{2}$, $x_3=\frac{1}{3}$; b) $x_1=\frac{1}{2}, x_2=\frac{3}{2}$; c) $x_1=1, x_2=x_3=\frac{1}{2}$; d) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{4}$.

51. a) $g=(X-1)(X-2)$; b) $f(1)=1$ deci f nu se divide cu $X-1$; c) Din teorema împărţirii cu rest se obţine că $f=g\cdot q+aX+b$. Din $f(1)=a+b$ şi $f(2)=2a+b$ obţinem că $a+b=1$ şi $2a+b=1$ cu soluţiile $a=0, b=1$ şi $r=1$. **52.** a) Restul împărţirii lui f la g este $r=0$ şi se obţine că $a=-3, b=1$; b) f se divide cu g, din punctul a), deci $f=g\cdot(x-3)=$
$=(x-1)(x-3)(x^2+x+2)$; c) Se observă că ecuaţia se scrie $f(3^x)=0$, pentru $a=-3$, $b=1$. Rezultă că $(3^x-3)(3^x-1)=0\Rightarrow x\in\{0,1\}$. **53.** a) $f(0)=n$ şi $f(1)=1+m+n\Rightarrow$
$\Rightarrow n=0, m=-1$; b) Avem din relaţiile lui Viete $(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+$
$+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)=2\Rightarrow -2m=2\Rightarrow m=-1$; c) $f=X^4+X^2+1=(X^2-X+1)(X^2+X+1)$.

54. a) $f=(x-9)(x^2-1)$; b) $f(x)=0\Rightarrow x_1=-1, x_2=1, x_3=9$ etc; c) $f(3^x)=0\Rightarrow$
$\Rightarrow(3^x-9)(3^x-1)(3^x+1)=0\Rightarrow x\in\{0,2\}$. **55.** a) $f(3)=0\Rightarrow 3a+15=0\Rightarrow a=-5$;
b) $a=-5\Rightarrow f(x)=(x-3)(x^2+x-2)=0\Rightarrow x_1=3, x_2=1, x_3=-2$; c) $S_1=2$, $S_2=14$, $S_3=20$. **56.** a) $f(1)=0\Rightarrow m=-9$; b) $f(\sqrt{2})=m+22+\sqrt{2}(7+2m)\in\mathbb{Q}\Rightarrow m=-\frac{7}{2}$;

c) Din a) se obţine că $f=(X-1)(-9X^2+2X+9)$, cu $x_1=1$, $x_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{82}}{9}$ etc.

57. a) $S=m+1=1\Rightarrow m=0$; b) $f(\sqrt{3})=0\Rightarrow 3\sqrt{3}-3(m+1)-3\sqrt{3}+3=0\Rightarrow m=0$;

c) Din $m=0\Rightarrow f(\sqrt{3})=0$ şi $f=(x-1)(x^2-3)$. **58.** a) $f(\hat{2})=\hat{0}\Rightarrow a=\hat{1}$;

c) $f=(X+\hat{1})(X^2+\hat{1})=0\Rightarrow x\in\{\hat{4},\hat{2},\hat{3}\}$. **59.** a) $a_1+x_2+x_3+x_4=a\Rightarrow a=3$;

Scanned with OKEN Scanner

b) $f=X^4-3X^2-3X+5\Rightarrow s_1=\dfrac{x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4}=\dfrac{3}{5}$ şi $s_2=9$.

60. b) $f=\left(X^2-7-2\right)\left(X_2-7+2\right)=\left(X^2-9\right)\left(X^2-5\right)=(X-3)(X+3)\left(X-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$;

c) $x\in\left\{-3,3,\sqrt{5},-\sqrt{5}\right\}$. **61.** a) $f(-1)=0\Rightarrow -2m-10=0\Rightarrow m=-5$;

b) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=16-4m<0$ dacă $m>4$. **62.** a) $q=X^2-X$, $r=1$;

b) $f=\left(X^2+1\right)\left(X^2-X+a+1\right)+(b+1)X+1-a+c$ şi $f(1)=-1\Rightarrow b+1=1$, $1-a+c=0$, $a+b+c=-1$. Se obţine $a=b=0$, $c=-1$; c) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1-2a<0$ pentru $a>\dfrac{1}{2}$.

63. a) $S=-2$; b) $f=X^4+2X^3-X^2-2X=X\left(X+2\right)\left(X^2-1\right)$, $x_1=0$, $x_2=-2$, $x_3=1$, $x_4=-1$. **64.** a) $x_1x_3=x_2^2$ şi $x_1x_2x_3=8\Rightarrow x_2^3=8\Rightarrow x_2=2$. Din $f(2)=0\Rightarrow a=5$;

b) $a=5\Rightarrow f(2)=0\Rightarrow f=(X-2)\left(X^2-5X+4\right)\Rightarrow x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=4$. **65.** a) Din $x_1+x_2+x_3=3$ şi $x_1+x_3=2x_2\Rightarrow x_2=1$. Din $f(1)=0\Rightarrow m=8$; b) Ecuaţia se scrie $(x-1)\left(x^2-2x-8\right)=0\Rightarrow x_1=1$, $x_2=4, x_3=-2$. **66.** a) $x_1=0$, $x_2=x_3=1$;

b) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4-2a=2\Rightarrow a=1$; c) Din $\left\{x_1,x_2,x_3\right\}=\left\{x_1^2,x_2^2,x_3^2\right\}\Rightarrow x_1x_2x_3=\left(x_1x_2x_3\right)^2\Rightarrow$ $\Rightarrow b^2=-b\Rightarrow b\in\{0,-1\}$. Din $x_1+x_2+x_3=x_1^2+x_2^2+x_3^3\Rightarrow 2=4-2a\Rightarrow a=1$. Convin doar $a=1, b=0$. **67.** a) $r=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{8}$; b) $r=f(a)=f(0)\Rightarrow a^3-a=0\Rightarrow a\in\{0,1,-1\}$;

c) $d=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ x_2 & x_3 & x_1\\ x_3 & x_1 & x_2\end{vmatrix}=0$, prin adunarea liniilor la prima linie. **68.** a) $x_1x_2x_3=4$ Considerăm x_1,x_2,x_3 rădăcinile unui polinom f. Cu relaţiile lui Viete se obţine că $f=X^3-2X^2-2X+4=$ $=(X-2)\left(X^2-2\right)$ cu soluţiile $x_1=2$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{2}$; b) $a=-2$, $b=-2$, $c=4$;

c) $f=(X-2)\left(X-\sqrt{2}\right)\left(X+\sqrt{2}\right)$. **69.** a) $c=1005$; b) $f=X^4+3X^3-X-3$;

c) $f=(X+3)\left(X^3-1\right)=(X+3)(X-1)\left(X^2+X+1\right)$. **70.** a) $x_1=x_2=0$, $x_3=1$; b) Fie $f(x)=x^3-3x+a$. Rezultă că x_0 este soluţie dublă dacă $f(x_0)=f'(x_0)=0$. Se obţine $x_0=1>0$ şi $a=2$.

Elemente de analiză matematică

I. Primitive

1. a) $f(x)=F'(x)=3x^2-4x+1$, $x\in\mathbb{R}$; b) $f(x)=F'(x)=x^{2010}+x^{2009}$, $x\in\mathbb{R}$;

c) $f(x)=4\cdot\left(x^3+2x\right)^3\cdot\left(x^3+2x\right)'=4\left(x^3+2x\right)^3\cdot\left(3x^2+2\right)$; d) $f(x)=\dfrac{-x^2-6x+5}{\left(x^2+5\right)^2}$;

e) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $x>0$; f) $f(x)=2^x\ln 2+3^x+x\cdot 3^x\ln 3$; g) $f(x)=2x\ln x+\dfrac{x^2+1}{x}$, $x>0$; h) $f(x)=(2x-1)\,e^x+\left(x^2-x-2\right)e^x$; i) $f(x)=2x\cos x-x^2\sin x+\cos x$;

Scanned with OKEN Scanner

j) $f(x)=-4\cos^3 x\sin x-4\sin^3 x\cos x$. **2.** a) $f(x)=2ax+b=4x-5\Rightarrow a=2,\ b=-5$;

b) $f(x)=6x-4=(4a-1)x+b\Rightarrow a=\frac{7}{4},\ b=-4$; c) $f(x)=e^x\left(ax^2+bx+c+2ax+b\right)=$

$=e^x\cdot\left(3x^2+7x-4\right)\Rightarrow a=3,\ b+2a=7,\ b+c=-4\Rightarrow a=3,\ b=1,\ c=-5$. **3.** a) Funcţia are în $x=1$ o discontinuitate de prima speţă, deci nu are primitive; b) f este continuă, deci are primitive; c) f este continuă; d) f are primitive. **4.** a) $f(0-0)=f(0+0)\Rightarrow a-2=0\Rightarrow$

$\Rightarrow a=2$; b) $\log_3(a+2)=2\Rightarrow a+2=9\Rightarrow a=7$. **5.** a) $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C$;

b) $F(x)=x^4-x^3+x^2-x+C$; d) $F(x)=e^x+\frac{2^x}{\ln 2}+C$; d) $F(x)=-2\cos x-\sin x+C$;

6. a) $I=x^5-x^3+\frac{x^2}{2}+x+C$; b) $I=2x^4+2x^3-2x+C$; d) $I=\frac{5^x}{\ln 5}+\frac{2^x}{\ln 2}+C$;

e) $I=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|+C$; g) $I=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$; h) $I=-2\cos x+3\sin x+C$;

j) $I=\arcsin\frac{x}{3}+C$; k) $I=\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)+C$; m) $I=\ln x-\frac{1}{x}+C$. **7.** Se foloseşte metoda

de integrare prin părţi: a) $I=\int(x+1)\left(e^x\right)'dx=(x+1)e^x-\int e^x\,dx=(x+1)e^x-e^x+C=$

$=xe^x+C$; b) $I=\int x'\ln x\,dx=x\ln x-\int 1\,dx=x\ln x-x+C$; c) $I=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-$

$-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$; d) $I=\int x^2\left(e^x\right)'dx=x^2e^x-2\int xe^x\,dx=x^2e^x-2(x-1)e^x+C$;

e) $I=\int x'\ln^2 x\,dx=x\ln^2 x-2\int\ln x\,dx$ etc; f) $I=\int x(-\cos x)'dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx=$

$=-x\cos x+\sin x+C$. **8.** a) $u(x)=x^2+x\Rightarrow u'(x)=2x+1\Rightarrow I=\int u^6(x)\cdot u'(x)\,dx=$

$=\frac{u^7(x)}{7}+C=\frac{\left(x^2+x\right)^7}{7}+C$; b) $u=2x^3-x^2+1\Rightarrow u'=6x^2-2x=2\left(3x^2-x\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int u^5\cdot u'\,dx$; c) $u=x^2+3x+9,\ u'=2x+3,\ I=\int\frac{u'}{u}dx=\ln u(x)+C$; d) $u=2+\sin x,$

$u'=\cos x,\ I=\int\frac{u'}{u}dx$; e) $u=x^2,\ u'=2x\Rightarrow I=\int\frac{u'}{u^2+5}dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{u(x)}{\sqrt{5}}+C$, etc;

f) $u=x^3,\ u'=3x^2,\ I=\frac{1}{3}\int\frac{u'}{\hat{u}^2-4^2}dx=\frac{1}{24}\ln\left|\frac{x^3-4}{x^3+4}\right|+C$; g) $u=\sin x,\ u'=\cos x\Rightarrow$

$\Rightarrow I=\int u^5\cdot u'dx=\frac{u^6(x)}{6}+C$; h) $u=\cos x,\ u'=-\sin x$; i) $u=e^x+x,\ u'=e^x+1$;

j) $u=\ln x,\ u'=\frac{1}{x}\Rightarrow I=\int u^{-2}\cdot u'\,dx=-\frac{1}{u(x)}+C$; k) $u=4-x^4$. **9.** a) $f(x)=F'(x)=$

Scanned with OKEN Scanner

$= -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$; b) $F'(x) = f(x) = \frac{-(2x+3)}{(x+1)^2(x+2)^2} < 0$, pentru $x \geq 0$. **10.** a) f este continuă; b) $F''(x) = f'(x) = \frac{1}{x} > 0$, $\forall x \in (1,\infty) \Rightarrow F$ convexă pe $(1,+\infty)$.

11. a) $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + x + 2012$; b) $F(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x - \frac{e^2}{2}$.

II. Integrala definită

1. a) $I = \int_0^1 (3x^2 - 3x + 1)\,dx = \frac{1}{2}$; b) -2; d) $\frac{\pi}{8}$; g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; h) 1. **2.** a) $\frac{(x^3-x)^5}{5}\Big|_0^1 = 0$;

b) $\frac{\sin^4 x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{64}$; c) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **4.** $\int_0^1 \frac{1}{x+1}(e^x)'\,dx = \frac{e^x}{x+1}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2}\,dx$.

6. $\int_0^1 (e^{-x^2} + x^2)\,dx \geq \int_0^1 1\,dx \Rightarrow \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \geq 1 - \int_0^1 x^2\,dx$ etc. **7.** a) $I_1 = 1$; c) $I_{n+1} + I_n =$

$= \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n + 2}{x+1}\,dx = \int_0^1 x^n\,dx + 2\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{n+1} + 2\ln 2$. **8.** a) $I_n = \int_e^{e^2} (\ln x)^n \cdot (\ln x)'\,dx =$

$= \frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1}\Big|_e^{e^2} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$; b) $1 \leq \ln^n x \leq 2^n \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{\ln^n x}{x} \leq \frac{2^n}{x} \Rightarrow \int_e^{e^2} \frac{1}{x}\,dx \leq I_n \leq 2^n \int_e^{e^2} \frac{1}{x}\,dx$ etc.

9. a) $I_1 = \int_0^1 (x + x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{6}$; b) $x(1+x)^n \leq x \cdot (1+x)^{n+1} \Rightarrow I_n \leq I_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

10. a) $f(x)$ este suma unei progresii geometrice cu rația $q = (-x)$; b) $(x+1)f(x) = 1 - x^{2012} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1 (x+1)f(x)\,dx = \int_0^1 (1 - x^{2012})\,dx < 1$. **12.** a) $f'(x) = g(x)$, $x \geq 1$; b) $\int_1^e f(x)g(x)\,dx =$

$= \int_1^e f(x) \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{2}f^2(x)\Big|_1^e = \frac{1}{e^2}$; c) $\int_1^a \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln^2 a = 2 \Rightarrow \ln a = \pm 2 \Rightarrow a \in \{e^{-2}, e^2\}$.

Soluție $a = e^2$. **13.** a) f este continuă; b) $\int_{-1}^4 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 (1 - 3x^2)\,dx + \int_0^4 (1 - x + \sqrt{x})\,dx = \frac{4}{3}$.

14. $\int_1^m f(x)\,dx = \ln m$. Din $\ln a + \ln c = 2\ln b \Rightarrow ac = b^2$. **15.** $a \in \left\{-\frac{8}{3}, 2\right\}$.

III. Aplicații ale integralei definite

3.1 Arii și volume

1. a) $A = \int_1^3 f(x)\,dx = \left(\frac{3x^2}{2} + 5x\right)\Big|_1^3 = 22$; b) $A = 4$; c) $2e - 1$; d) $\frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}$.

2. a) $A = \int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx = \frac{1}{6}$; b) $A = \frac{4}{3}$; c) 9. **3.** $A = \int_{-1}^1 (x+4)\,dx + \int_1^3 (3x^2 + x + 1)\,dx =$

$= 8 + 32 = 40$. **4.** $A = \int_0^1 f(x)\,dx = \left(\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x\right)\Big|_0^1 = \ln 2 + \frac{\pi}{4}$. **5.** Din $f(x) = -2x \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow x\in\{0,-3\}\Rightarrow A=\int_{-3}^{0}\left(-2x-x^2-x\right)dx=\frac{9}{2}$. **6.** $A=\int_{0}^{e-1}\frac{x}{x+1}\,dx=\left(x-\ln(x+1)\right)\Big|_{0}^{e-1}=e-2$.

7. $A=\int_{a}^{e^2}\frac{(1+\ln x)'}{1+\ln x}\,dx=\ln(1+\ln x)\Big|_{a}^{e^2}=\ln 3-\ln(1+\ln a)=\ln\frac{3}{2}\Rightarrow\ln a=1\Rightarrow a=e$.

9. a) $V=\pi\int_{-1}^{2}f^2(x)dx=27\pi$; b) $\frac{26\pi}{3}$; c) $V=\pi\int_{0}^{2}\left(x^2-1\right)^2dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x\right)\Big|_{0}^{2}=\frac{46\pi}{15}$;

d) $V=\int_{0}^{3}\left(3x^2-x+4\right)dx=\frac{69\pi}{2}$; e) $V=\pi\int_{-1}^{1}4^x\,dx=\pi\cdot\frac{15}{4\ln 4}$; f) $V=\pi\int_{0}^{1}\frac{x+1}{x+2}dx=$

$=\pi\left(x-\ln(x+2)\right)\Big|_{0}^{1}$. **10.** $V=\pi\int_{1}^{c}(\ln x)'\ln x\,dx=\frac{\pi(\ln x)^2}{2}\Big|_{1}^{e}=\frac{\pi}{2}$. **11.** $a=6$.

12. $V=\pi\int_{2}^{2+a}(2x-3)\,dx=2\pi\Rightarrow a^2+a-2=0\Rightarrow a=1$. **13.** a) $V=\pi\int_{0}^{1}\left(a^2x^2-6ax+9\right)dx=$

$=\left(\frac{a^2}{3}-3a+9\right)\pi$; b) $a=\frac{9}{2}$.

3.2 Probleme de sinteză

1. a) f este continuă; b) $I=\int_{-1}^{0}\left(x^3+xe^x\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}+(x-1)e^x\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{2}{e}-\frac{5}{4}$;

b) $V=\pi\int_{0}^{1}\left(x+2\sqrt{x}+1\right)dx=\frac{17}{6}\cdot\pi$. **2.** a) $F'=f$; b) $A=1$; c)

$I=\int_{1}^{x}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)'dt=\frac{f'(t)}{f(t)}\Big|_{1}^{x}=\;=\frac{x+1}{2}-x$. **3.** a) f este continuă; b) $V=\frac{56\pi}{3}$; c)

$2I=\int_{-2}^{-1}xf(x)\,dx+\int_{-1}^{0}xf(x)dx=\int_{-2}^{-1}xe^{x+1}\,dx+\int_{-1}^{0}\left(x^2+2x\right)dx=\frac{3}{e}-\frac{8}{3}$. **4.** $g(x)=x^3+3x$; a) $\frac{7}{4}$;

b) $\int_{1}^{a}3xe^x\,dx=6e^a\Rightarrow\;(x-1)e^x\Big|_{1}^{a}=2e^a\Rightarrow a=3$; c) $\int_{0}^{1}g^{2011}(x)\cdot g'(x)\,dx=\frac{g^{2012}(x)}{2012}\Big|_{0}^{1}=\frac{4^{2012}}{2012}$.

5. a) $F'(x)=f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$; b) $1+\frac{3}{4}$; c) $I=\int_{1}^{e}f(\ln x)\cdot(\ln x)'\,dx=\int_{1}^{e}(\ln x)^2(\ln x)'\,dx+$

$+\int_{1}^{e}1\,dx+\int_{1}^{e}\frac{1}{x}\,dx=e+\frac{1}{3}$. **6.** a) $\int\left(e^x+\frac{1}{x}\right)dx=e^x+\ln x+C$; c) $\int_{1}^{2}e^x\cdot\frac{1}{x}\,dx\le\frac{1}{2}\int_{1}^{2}\left(e^{2x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$ etc.

7. a) $g'(x)=f(x)$; b) $I=\int_{0}^{1}g(x)\cdot g'(x)dx=\frac{g^2(x)}{2}\Big|_{0}^{1}=\frac{\left(e^2-1\right)^2}{2e^2}$; c) Se are în vedere

$f'(x)=g(x)$. **8.** a) $\frac{e^2-1}{2}$; b) $I=\int_{1}^{e}\left[x+\ln x\cdot(\ln x)'\right]dx=\frac{x^2}{2}+\frac{(\ln x)^2}{2}\Big|_{1}^{e}=\frac{e^2}{2}$;

c) $I_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx=\frac{2n+1}{2}$ etc. **9.** a) $I=\frac{x^4}{4}+C$; b) $A=\int_{0}^{1}\frac{x^3}{x+1}dx=$

Scanned with OKEN Scanner

$= \int_0^1 \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{5}{6} - \ln 2$; c) Din $1 \le (x+1)^2 \le 4 \Rightarrow \frac{x^6}{4} \le \frac{x^6}{(x+1)^2} \le x^6$ şi se integrează pe intervalul $[0,1]$. **10.** a) $f_1(x) = \sqrt{5x} \Rightarrow \int_1^4 f_1(x)\,dx = \sqrt{5} \cdot \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx$; b) $\frac{x+2}{f_2^2(x)} = \frac{x+2}{x^2+4x} =$

$= \frac{1}{2} \frac{(x^2+4x)'}{x^2+4x}$; c) $V = \pi \int_1^4 \frac{1}{x(x+4)}\,dx$, iar $\frac{1}{x(x+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} \right)$. Se obţine $V = \frac{\pi}{4}(\ln 5 - \ln 2)$. **11.** a) $f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ şi $f_1(x) \cdot \sqrt{x+1} = x \Rightarrow I = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$;

b) $V = \pi \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \pi \left(\int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx \right) = \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)\pi$. **12.** a) $f(x) = F'(x) = 2x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 2$; b) $I = \int_0^1 (x+1)\,e^x\,dx = xe^x \Big|_0^1 = e$; c) $\int_0^1 (ax+1)^2\,dx = \left(\frac{a^2x^3}{3} + ax^2 + x \right) \Big|_0^1 = \frac{a^2}{3} + a + 1$.

Dar $\frac{a^2}{3} + a + 1 \ge \frac{1}{4} \Rightarrow 4a^2 + 12a + 12 \ge 3$ sau $(2a+3)^2 \ge 0$. **13.** a) $f_0(x) = \frac{e^x}{2}$ şi $I = \frac{e^x}{2} + C$;

b) $A = \ln \frac{e+1}{2}$; c) $0 \le x \le 1 \Rightarrow \frac{e^x}{e^{nx}+1} \ge \frac{e^x}{e^{(n+1)x}+1}$ etc. **14.** a) $\frac{2^x}{\ln 2} + C$; b) $A = 1$;

c) Regula lui L'Hospital $l = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$; **15.** a) $F(x) = \frac{x^{2012}}{2012} + \frac{x^2}{2} + x + 2010$; b) $V = \frac{\pi}{3}$;

c) Regula lui L'Hospital $l = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{2012x^{2011}} = \frac{1}{2012}$. **16.** a) $\frac{3}{4}$; b) $f'(x) = 3x^2 + 2mx + n$. Se

obţine că $m = 0, n = -3, p = 2$; c) $l = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{4x^3} = \frac{1}{4}$. **17.** a) f este continuă;

b) $I = \int_0^1 (x^2 + x - 2)\,dx = -\frac{7}{6}$; c) $V = \pi \int_1^e (\ln x)^2\,dx = \left(x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x \right) \Big|_1^e = e - 2$.

18. a) $F'(x) = f(x)$; b) $A = 1$; c) $\ln 2 - \ln(e+1)$. **19.** a) $f_1\left(\sqrt{x-1} \right) = \frac{1}{x}$;

b) $g(x) = (x^2+1)^2$, $G(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x - 1$; c) $xf_n(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} = 2 \cdot \frac{u'(x)}{u^n(x)}$, unde

$u(x) = x^2 + 1$. Se obţine $I_n = \frac{2^{1-n} - 1}{2(1-n)}$, $n \ge 2$. **20.** a) $F'(x) = f(x)$; b) $I = \int_1^2 xe^x\,dx = e^2$;

c) $A = e^e - 2 = e^m - 2 \Rightarrow m = 2$. **21.** b) $I = \left(\ln(x+1) - \ln(x+3) + x \right) \Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2 + 1$;

c) $A = \ln(k+1) - \ln(k+3) + k + \ln 3$. Se obţine $k = \sqrt{3}$. **22.** a) $\ln 2$; b) $V = \frac{2\pi}{3}$; c) Din

$a \le x \le a+1 \Rightarrow \frac{1}{a+2} < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{a+1}$ şi se interpretează. **23.** a) $I = \ln e - \ln 2 = 1 - \ln 2$;

Scanned with OKEN Scanner

b) $F'(x)=f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$ şi $F''(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}<0,\ \forall x\geq 2$; c) $A=\ln a+\ln(a-1)-$

$-\ln 2$. Se obţine $a=3$. **24.** a) $\frac{1}{2}$; b) $I=f'(x)\Big|_0^1=f'(1)-f'(0)=2e-1$;

c) $\frac{f(x^2)}{x}=\frac{x^2e^{x^2}}{x}=x\cdot e^{x^2}=\frac{1}{2}\cdot e^{x^2}\cdot(x^2)'\Rightarrow I=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_1^2=\frac{1}{2}(e^4-e)$. **25.** a) f este continuă pe

$\mathbb{R}$; b) $I=\int_0^1(2x+3)dx+\int_1^2(3x^2+2)dx=4+9=13$; c) $A=\int_a^{a+1}(3x^2+2)dx=(a+1)^3+$

$+2(a+1)-a^3-2a=3a^2+3a+3=21\Rightarrow a=2$.

REZOLVĂRI VARIANTE PROPUSE

VARIANTA 01

SUBIECTUL I

1. $\log_3\frac{1}{81}=\log_3 3^{-4}=-4,\sqrt{16}=4$ şi $C_{2017}^{2016}=C_{2017}^{1}=2017$. **2.** Fie $x=a+bi$. Rezultă egalitatea: $3(a+bi)+2i(a-bi)=5+5i$ sau $3a+3bi+2ai+2b=5+5i$. Se obţine că $\begin{cases}3a+2b=5\\3b+2a=5\end{cases}$ şi $a=b=1$, deci $z=1+i$. Atunci $|z|=\sqrt{2}$. **3.** $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$, deci $V(0,7)$.

4. $(n+1)!=n!(n+1)$ şi rezultă că $2n-8=n+1$ cu soluţia $n=9$. **5.** $AB=\sqrt{1^2+m^2}=\sqrt{3}$, de unde $m^2=2$ şi $m\in\{\pm 2\}$. **6.** Din relaţia $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ se obţine că $\sin^2 x=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$, deci $\sin x=\frac{1}{2}$. Atunci $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ şi $E=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. a) $B\cdot A=\begin{pmatrix}2&4\\2&-1\end{pmatrix}$ şi suma $S=7$. b) $AB=\begin{pmatrix}4&-2\\1&-3\end{pmatrix},(AB)^{-1}=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-3&2\\-1&4\end{pmatrix}$. c) Din egalitatea $BC=\begin{pmatrix}10&0\\4&-1\end{pmatrix}$, rezultă $x=0$. **2.** a) $\frac{1}{2}$. b) $x\circ x^2=32\Leftrightarrow 2^{x+x^2-1}=2^5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+x-6=0$, cu soluţia $x\in\{2,-3\}$. c) Avem că $(1\circ 2)\circ 3=2^2\circ 3=2^6$ şi $1\circ(2\circ 3)=1\circ 2^4=2^{16}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. a) $f(1)=2,f'(0)=5,f''(0)=-4,S=3$. b) $y+2=f'(0)\cdot(x-0)$. Rezultă ecuaţia $y+2=5x$. c) $f''(x)=6x-4$. Punctul de inflexiune $x_0=\frac{2}{3}$. Se obţine $A\left(\frac{2}{3},\frac{20}{27}\right)$.

2. a) Funcţia este continuă pe $\mathbb{R}$ deci are primitive.

b) $I=\int_{-2}^0(x^2+3)dx+\int_0^2(e^x+2)dx=\frac{8}{3}+6+e^2+4-1=e^2+\frac{35}{3}$. c) $V=\pi\int_0^1(e^x+2)^2dx=$

$=\pi\int_0^1(e^{2x}+4e^x+4)dx=\left(\frac{1}{2}e^{2x}+4e^x+4x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e^2+8e-1)\pi$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 02

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Fie $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+ai$. Atunci $1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+a^2$ cu soluția $a\in\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$.

2. Se pune condiția $f(-2)=4$. Se obține $m\cdot(-2)^2-m\cdot(-2)+2=4\Leftrightarrow 4m+2m+2=4$, adică $m=\frac{1}{3}$. **3.** $(x-1)^2-x=1$, de unde $x^2-3x=0$ cu soluțiile $x_1=0$ și $x_2=3$.

4. Deoarece $S=x_1+x_2=\frac{10}{2}=5$ și $P=x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}$ rezultă că $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=5\cdot 2=10$.

5. Din teorema cosinusului, $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A$ adică $BC^2=36+100-2\cdot 6\cdot 10\cdot\frac{1}{2}=76$. Se obține $BC=2\sqrt{19}$.

6. Se are în vedere că $\arcsin\left(\frac{-1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$, $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A^2=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=2I_2$. b) $\sqrt{2015}\cdot I_2-A=\begin{pmatrix}\sqrt{2015}-1&-1\\-1&\sqrt{2015}+1\end{pmatrix}$ și

$\det\left(\sqrt{2015}\cdot I_2-A\right)=\left(\sqrt{2015}-1\right)\left(\sqrt{2015}+1\right)-1=2013$.

c) Luând $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ și făcând înmulțirile rezultă că $\begin{pmatrix}a+c&b+d\\a-c&b-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+1&b+1\\c+1&d-1\end{pmatrix}$.

Rezultă că $b=c=d=1$ și $a=3$, adică $X=\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}$. **2.** a) $2\circ 3=2$, apoi

$1\circ(2\circ 3)=1\circ 2=0$.

b) Elementul netru $e\in\mathbb{R}$ trebuie să verifice $x\circ e=e\circ x=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci $x+e-3=x$. Așadar $e=3$.

c) Se obține ecuația $4^x+4^x-3=1$, adică $2\cdot 4^x=4$ sau $4^x=2$ cu soluția $x=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$. Avem că $f'(x)=e^x+1$, deci $f'(1)=e+1$.

b) Ecuația are forma $y=mx+n$ cu $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ și $n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=0\Rightarrow y=x$ este ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției (prima bisectoare).

c) $g(x)=e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}$ și $g'(x)=-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}\left(e^{\frac{1}{x}}+1\right)<0\Rightarrow g$ este descrescătaore pe $(-\infty,0)$. **2.** a) $\int_2^{2\sqrt{2}}x\left(x^2-4\right)dx=\left(\frac{x^4}{2}-2x^2\right)\Big|_2^{2\sqrt{2}}=4$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $\int f(x)dx=\int x\sqrt{x^2-4}dx=\frac{1}{2}\cdot\int 2x\sqrt{x^2-4}dx=\frac{1}{2}\cdot\int(x^2-4)'(x^2-4)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-4)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=$

$=\frac{1}{3}(x^2-4)\sqrt{x^2-4}+C$ .c) $vol(C_f)=\pi\int_2^3 f^2(x)dx=\pi\int_2^3(x^4-4x^2)dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{3}\right)\Big|_2^3=\frac{253\pi}{15}$.

VARIANTA 03

SUBIECTUL I

1. Punctele de intersecţie cu axele Ox, respectiv Oy sunt $A(5,0)$ şi $B(0,-5)$. **2.** $f(x)=0\Rightarrow x^2-5x+4=0,\Delta=9$. Se obţine $x_1=1,x_2=4$. Din tabelul de semn al funcţiei f se obţine $x\in[1,4]$. **3.** $2x+3=5^2\Leftrightarrow x=11$, care verifică condiţia de existenţă, $2x+3>0$. **4.** $a_2-a_1=2$, deci raţia $r=2$. Se obţine că $a_6=a_1+5r=11$. **5.** $A_{(ABC)}=\frac{BC\cdot CA\cdot\sin C}{2}=10$. **6.** $d: y=2x+4\Rightarrow m_d=2$. Din condiţia $d_1\parallel d_2\Rightarrow m_{d_1}=m_d=2$. Ecuaţia dreptei d_1 este $y-y_1=m(x-x_1)$, adică $y-2=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x$.

SUBIECTUL al II-lea

1. a) $B-A=\begin{pmatrix}5&0\\-4&-3\end{pmatrix}$, $\det(B-A)=5(-3)-0(-4)=$

$=-15, \det(B-A)+\det(B)=-15+2=-13$. b) ${}^tC=\begin{pmatrix}5&-4\\0&-3\end{pmatrix}$, unde $C=B-A$. Matricea adjunctă $C^*=\begin{pmatrix}-3&0\\4&5\end{pmatrix}$. Rezultă $C^{-1}=\frac{1}{\det(C)}\cdot C^*$, adică $C^{-1}=-\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-3&0\\4&5\end{pmatrix}$. c)

$$X=BC^{-1}=\begin{pmatrix}6&-2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0\\-\frac{4}{15}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{26}{15}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

2. a) Se înmulţesc parantezele şi se efectuează calculeze sau $x*y=x(y+6)+6(y+6)-6=$

$=(x+6)(y+6)-6$. b) $x*(x-2)=-3\Leftrightarrow x(x-2)+6x+6(x-2)+30=-3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+10x+21=0,\Delta=b^2-4ac=100-84=16$ şi $x_1=-7,x_2=-3$. c) $\exists e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x,\forall x\in\mathbb{R}$. Se obţine $x(e+6)+6e+30=x\Rightarrow e+6=1$ şi $6e+30=0$. Se obţine $e=5\in\mathbb{R}$ este element neutru al legii de compoziţie.

SUBIECTUL al III-lea

1. a) $f'(x)=2x+\frac{1}{x},\forall x\in(0,+\infty)$. b) $f'(x)=\frac{2x^2+1}{x},\forall x\in(0,+\infty)$, $f'(x)>0$, $\forall x\in(0,\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(0,\infty)$. c) Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul cu abscisa $x_0=1$ este $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$. Avem că $f(1)=1, f'(1)=3$ şi ecuaţia tangentei devine $y-1=3(x-1)\Leftrightarrow 3x-y-2=0$.

Scanned with OKEN Scanner

2. a) F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x)=4\frac{x^3}{4}+2\cdot 2x+1, F'=x^3+4x+1=f(x)\Rightarrow F$ este o primitivă a lui f. b) $\int_1^2 f(x)-(4x+1)\,dx=\int_1^2 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big|_1^2=\frac{15}{4}$. c) Aria suprafeţei este $\int_0^2|x^3+4x+1|dx=\int_0^2 f(x)\,dx\overset{(a)}{=}F(x)\Big|_0^2=F(2)-F(0)=\left(\frac{16}{4}+2\cdot 4+2\right)-0=14$.

VARIANTA 04

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $a=7-9+2=0\in\mathbb{N}$. **2.** $x_1+x_2-x_1x_2=s-p=-5-6=-11$.

3. Condiţia de existenţă a logaritmului: $x^2+9x>0\Rightarrow x\in(-\infty,-9)\cup(0,+\infty)=D$,

$x^2+9x=10\Rightarrow x^2+9x-10=0\Rightarrow x_1=-10\in D, x_2=1\in D$. Deci $x\in\{-10,1\}$.

4. Numerele căutate sunt de forma $\overline{abc}$, $a\neq b\neq c;\ a,b,c\in A, a\neq 0$.

$n=A_5^3-A_4^2\Rightarrow n=60-12=48$.

5. $\sin^2 x+\cos^2 x=1, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\cos x>0\Rightarrow\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}\Rightarrow\sin x=\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

6. $AB=\frac{x-4}{3-4}=\frac{y+2}{2+2}\Leftrightarrow 4x+y-14=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) Din calcul $A\cdot B=B\cdot A=O_2$.

b) $(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-BA+B^2=A^2+B^2$.

$(A-B)^3=(A-B)^2\cdot(A-B)=(A^2+B^2)(A-B)=A^3-A^2B+AB^2-B^3=A^3-B^3$.

c) $A+B=5I_2\Rightarrow(A+B)^n=5^nI_2$. **2.** a) $g=X(X^2-1)=X(X-1)(X+1)$, rădăcinile lui g sunt $x_1=0; x_2=1; x_3=-1$. b) $g=X(X^2-1)=X^3-X$. Din împărţire obţinem $q=X+2, r=-3X^2+1$. c) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-$ $-2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)=12$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x)=\frac{2x^2+2}{4x^2}=\frac{x^2+1}{2x^2}$. b) $h: y-f(2)=f'(2)(x-2), f(2)=\frac{3}{4}, f'(2)=\frac{5}{8}$. Se obţine $h: 5x-8y-4=0$. c) $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2}=\frac{1}{2}; n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-1}{2x}=0$. Dreapta $y=\frac{1}{2}x$ este asimptotă oblică a graficului funcţiei f spre ∞.

2. a) F este o primitivă a lui $f\Leftrightarrow F$ este derivabilă şi $F'(x)=f(x), (\forall)x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=[2ax^2+(2a+2b)x+(b+2c)]\cdot e^{2x}$. Se obţine $a=2; b=-2; c=\frac{3}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $\int_0^1 f(x)e^{-2x}dx=\int_0^1(4x^2+1)dx=\frac{7}{3}$. c) $g(x)=\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)$, $V=\pi\int_0^1 g^2(x)dx$.

$V=\pi\int_0^1\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(e^{4x}+2+e^{-4x}\right)dx=\pi\left(\frac{e^{4x}}{4}+2x-\frac{e^{-4x}}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi\left(e^8+8e^4-1\right)}{4e^4}$

VARIANTA 05

SUBIECTUL I

1. $\log_6 3!-\log_3 1-2\log_2\frac{1}{4}=\log_6 6-0-2\log_2 2^{-2}=1+4=5$. **2.** Se pun condiţiile $-1\le 2x-5\le 1$. Rezultă că $x\in[2,3]$ **3.** Condiţii: $\begin{cases}x>0\\x-1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\x>1\end{cases}\Rightarrow x\in(1,\infty)$. Se obţine că $\log_2 x(x-1)=1\Rightarrow x^2-x=2\Rightarrow x^2-x-2=0$ cu soluţiile $x\in\{2;-1\}$. Soluţia acceptată este $x=2$. **4.** $d_1\parallel d_2\Leftrightarrow m_1=m_2$. Se obţine că $m_1=m, m_2=\frac{1}{m}$ şi $m=\frac{1}{m}\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow m\in\{-1,1\}$.

5. $\vec{u}=m\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\vec{v}=(2m-1)\vec{i}+3\vec{j}$ sunt coliniari dacă $\frac{m}{2m-1}=\frac{-3}{3}\Leftrightarrow 3m=-6m+3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9m=3\Leftrightarrow m=\frac{3}{9}\Leftrightarrow m=\frac{1}{3}$. **6.** Se observă că triunghiul ABC este dreptunghic în B. Deci $R=\frac{AC}{2}=\frac{20}{2}=10$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) Matricea sistemului este $A=\begin{pmatrix}2 & m & -3\\ 1 & 1 & -1\\ m & 2 & 1\end{pmatrix}$. A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A\neq 0$. Avem că $\det A=2-6-m^2+3m-m+4=-m^2+2m$ şi $-m^2+2m=0\Rightarrow m=0, m=2$. Deci $m\in\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$.

b) Se obţine $m=0$. c) Pentru $m=1\Rightarrow \det A=-1+2=1$. Se aplică regula lui Cramer.

$d_x=\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=-5, d_y=\begin{vmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=5, d_z=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=-2$. Rezultă că $x=-5, y=5, z=-2$.

2. a) $a=\hat{0}\Rightarrow x^3+\hat{2}=\hat{2}\Rightarrow x^3=\hat{0}\Rightarrow x=\hat{0}$. b) Avem $f\left(-\hat{1}\right)=\hat{3}\Leftrightarrow -\hat{1}-a+\hat{2}=\hat{3}\Leftrightarrow a=\hat{3}$.

c) Trebuie că $f\left(\hat{3}\right)=\hat{0}$. Se obţine condiţia $\hat{4}+\hat{3}a=\hat{0}$ sau $\hat{3}a=-\hat{4}=\hat{1}\Rightarrow a=\hat{2}$ şi $f=x^2+\hat{2}x+2$. Aşadar, $card(G)=1$.

SUBIECTUL AL III-LEA

1. a) f este continuă pe $[-\infty,-2)$ şi pe $(-2,\infty)$. Din egalitatea $f(-2-0)=f(-2+0)=$ $=f(-2)$ se obţine că $\frac{-4+m}{3}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=\frac{5}{2}$. b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+m}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{2x}=0\Rightarrow y=0$ asimptotă orizontală. c) $0,1,2,3\in(-2,\infty)$ şi astfel $f(x)=x\cdot 2^x$. Se obţine că $f'(x)=2^x+x\cdot 2^x\ln 2=$ $=2^x(1+x\ln 2)$. Se obţine că $S=15+30\ln 2$. **2.** a) $f_1(x)=x\sqrt{x^2+1}$. Rezultă cu notaţia

Scanned with OKEN Scanner

$x^2+1=t$ că $I_t=\int\frac{\sqrt{t}}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3}+\mathscr{C}=\frac{1}{3}\sqrt{t^3}+\mathscr{C}=\frac{1}{3}t\sqrt{t}+\mathscr{C}$. Deci $\int x\sqrt{x^2+1}dx=$

$=\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}+\mathscr{C}$. b) $\int_0^1\frac{\left(x^3\sqrt{x^2+1}\right)^2}{x^3}dx=\int_0^1\frac{x^6\left(x^2+1\right)}{x^3}dx=\int_0^1\left(x^5+x^3\right)dx=\frac{x^6}{6}\Big|_0^1+\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{5}{12}$.

c) $0\le x\le 1\Rightarrow x^2+1\le 2\Rightarrow\sqrt{x^2+1}\le\sqrt{2}\Rightarrow x^n\sqrt{x^2+1}\le x^n\sqrt{2}$.

$\int_0^1 x^n\sqrt{x^2+1}dx\le\int_0^1 x^n\sqrt{2}dx=\frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

VARIANTA 06

SUBIECTUL I

1. $f(x)=ax+b\Rightarrow f(x-1)=ax-a+b$, iar $f(2x+1)=a(2x+1)+b=2ax+a+b$ şi înlocuind în relaţia dată obţinem: $2(ax-a+b)-3(2ax+a+b)=4x-3\Rightarrow$

$\Rightarrow 2ax-2a+2b-6ax-3a-3b=4x-3$ şi de aici

$\Rightarrow -4ax-5a-b=4x-3\Rightarrow\begin{cases}-4a=4\Rightarrow a=-1\\-5a-b=-3\Rightarrow 5-b=-3\Rightarrow b=8\end{cases}\Rightarrow f(x)=-x+8$.

2. $2(2x+7)=5-x+3x+11\Rightarrow 4x+14=2x+16\Rightarrow 2x=2\Rightarrow x=1$.

3. $5\cdot 3^x=3\cdot 5^x\Rightarrow\frac{3^x}{5^x}=\frac{3}{5}\Rightarrow\Rightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{3}{5}\Rightarrow x=1$. **4.** Din

$x^2+ax-2a=0\Rightarrow x_1+x_2=-a, x_1x_2=-2a\Rightarrow\ 2(x_1+x_2)-x_1x_2=-2a+2a=0$. **5.** Din

$\sin 70^\circ-\cos 70^\circ=a\Rightarrow\sin 110^\circ+\cos 110^\circ-a=$

$=\sin\left(180^\circ-70^\circ\right)+\cos\left(180^\circ-70^\circ\right)-\sin 70^\circ+\cos 70^\circ=\sin 70^\circ-\cos 70^\circ-\sin 70^\circ+\cos 70^\circ=0$.

6. $\log_2 18+\log_2 3-\log_2 27=\log_2\frac{18\cdot 3}{27}=\log_2 2=1$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $\det(A)=64\Leftrightarrow 2^x\cdot 4^x=64\Leftrightarrow(2\cdot 4)^x=8^2\Leftrightarrow x=2$.

b) $A\cdot B^t=\begin{pmatrix}2^x & 1\\ 0 & 4^x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2^x\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^x & 4^x+1\\ 0 & 4^x\end{pmatrix}$. Din egalitatea de matrice se obţine

$2^x=\sqrt{2}, 4^x+1=3, 4^x=2$ cu soluţia $x=\frac{1}{2}$. c) $A-B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ şi

$(A-B)^{-1}=\frac{1}{\det(A-B)}\cdot(A-B)^*=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

2. a) $xy-x-y+2=x(y-1)-y+1+1=(x-1)(y-1)+1$.

b) $x=y\Rightarrow x\circ x=(x-1)(x-1)+1==(x-1)^2+1$. Analog

$(x\circ x)^{\cdot}\circ x=\left[(x-1)^2+1-1\right](x-1)+1=(x-1)^3+1$ c) Utilizând b) ecuaţia dată devine:

$(\lg x-1)^3+1=2\Rightarrow(\lg x-1)^3=1\Rightarrow\lg x-1=1\Rightarrow\lg x=2\Rightarrow x=100$.

SUBIECTUL AL III-LEA

Scanned with OKEN Scanner

1. a) $f'(x)=\dfrac{-3x^2+8x+3}{\left(x^2+1\right)^2}, x\in\mathbb{R}$. b) Din $f'(x)=0\Rightarrow x\in\left\{-\dfrac{1}{3};3\right\}$. Din tabelul de variaţie se obţine că f este descrescătoare pe intervalele $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right]$ şi $[3,+\infty)$ şi crescătoare pe $\left[-\dfrac{1}{3},3\right]$.

c) Avem că $g(x)=\dfrac{\left(x^2+ax\right)(3x-4)}{x^2+1}$. Se obţine că $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$ şi $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^3-4x^2+3ax^2-4ax}{x^2+1}-3x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3a-4)x^2-3x-4ax}{x^2+1}=3a-4$. Din egalitatea $3a-4=5\Rightarrow a=3$.

VARIANTA 07

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $b_1\cdot b_3=b_2{}^2=9\Rightarrow b_1\cdot b_2\cdot b_3=9\cdot 3=27$. **2.** $f(2)=5, f(-2)=-3$. $f(2)\cdot f(-2)=-15$ **.3.** $2^{2x+2}=2^3\Rightarrow 2x+2=3\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$. **4.** Mulţimea A are $C_5^3=10$ submulţimi cu trei elemente, deci sunt 10 cazuri posibile. Mulţimea A are $C_4^2=6$ submulţimi cu 3 elemente care să-l conţină pe 3, deci sunt 6 cazuri favorabile.

$p=\dfrac{nr\ cazuri\ favorabile}{nr\ cazuri\ posibile}=\dfrac{6}{10}$ **.5.** $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}\Rightarrow 1=\dfrac{-1+x_B}{2}\Rightarrow x_B=3$,

$y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}\Rightarrow 1=\dfrac{2+y_B}{2}\Rightarrow y_B=0; B(3,0)$.

6. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin x\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{\pi}{2}\cdot\cos x=\sin x\cdot 0+1\cdot\dfrac{3}{7}=\dfrac{3}{7}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-1\cdot 1=-2$. b) $A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2I_2$;

c) $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+x & 1\\ 1 & -1+x\end{pmatrix}$; $\det B=(1+x)(-1+x)-1\cdot 1=x^2-2$.

Matricea B este inversabilă $\Leftrightarrow\det(B)\neq 0\Leftrightarrow x^2-2\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pm\sqrt{2}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$.

2. a) $f(1)+f(-1)=1+m+n-2-1+m-n-2=2m-4;$.

b) $x_1+x_2+x_3=+2,\ x_1x_2+x_1x_3+x_3x_2=4;\ x_1x_2x_3=2;\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}=\dfrac{x_1x_2+x_1x_3+x_3x_2}{x_1x_2x_3}$

$=\dfrac{4}{2}=2=x_1+x_2+x_3$. c) $f(3)=f(-1)\Rightarrow 27+9m+3n-2=-1+m-n-2\Rightarrow$

$\Rightarrow 8m+4n=-28\Rightarrow 4m+2n=-14$. Restul împărţirii polinomului f la polinomul $X-2$ este $f(2)=8+4m+2n-2=6-14=-8$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scanned with OKEN Scanner

1. a) $f'(x)=(x-1)'e^x+(x-1)(e^x)'=e^x+(x-1)e^x=e^x(1+x-1)=x\cdot e^x$.

b) $f(1)=0, f'(1)=e$. Ecuaţia tangentei este

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=e(x-1)\Rightarrow y=ex-e$.

c) $f'(0)=0, f'(x)\geq 0$ pentru $x\in[0,2]$, deci f este crescătoare pe $[0,2]$,

$f(0)=-1, f(2)=e^2\Rightarrow -1\leq f(x)\leq e^2$, pentru orice $x\in[0,2]$.

2. a) $\int_1^3 x\cdot f(x)dx=\int_1^3(x+4)dx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^3+2x\Big|_1^3=4+8=12$.

b) $A=\int_1^2|g(x)|dx=\int_1^2\frac{x}{x+4}dx=\int_1^2\frac{x+4-4}{x+4}dx=$

$\int_1^2\frac{x+4}{x+4}dx-4\int_1^2\frac{1}{x+4}dx=x\Big|_1^2-4\ln(x+4)\Big|_1^2=1-4(\ln 6-\ln 5)=1-4\ln\frac{6}{5}$.

c) $\int_1^e f(x)\ln x dx=\int_1^e\left(1+\frac{4}{x}\right)\ln x dx=\int_1^e\ln x\cdot+4\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=x\cdot\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx+$

$4\int_1^e\ln x(\ln x)'dx=e-x\Big|_1^e+4\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e=e-e+1+2(\ln^2 e-\ln^2 1)=1+2=3$.

VARIANTA 08

SUBIECTUL I

1. $a_5-a_2=3r\Rightarrow 3r=12\Rightarrow r=4$. **2.** $f(1)=1\Rightarrow f(f(1))=f(1)=1$. **3.** $3^{x^2-5}=81\Rightarrow$

$=3^4\Rightarrow x^2-5=4\Rightarrow x\in\{3,-3\}$. **4.** Dacă x este preţul iniţial al obiectului atunci

$x+\frac{10}{100}x=330\Rightarrow\frac{110}{100}x=330\Rightarrow x=300$ *lei*. **5.** Fie $M(x_M,y_M)$ mijlocul segmentului $[BC]$.

Rezultă $x_M=\frac{x_B+x_C}{2}, y_M=\frac{y_B+y_C}{2}\Rightarrow x_M=3, y_M=3, AM=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow AM=\sqrt{8}\Rightarrow AM=2\sqrt{2}$. **6.** $\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow\cos^2 x=1-\sin^2 x\Rightarrow\cos x=\frac{7}{25}$ sau

$\cos x=-\frac{4}{5}$. Cum $x\in(0^0,90^0)$, rezultă $\cos x>0\Rightarrow\cos x=\frac{7}{25}$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $\det(A)=-6+6=0$. b) $A^2=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -6 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow A^2=-A$. c) $X(a)=\begin{pmatrix}2a+1 & -a\\ 6a & -3a+1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow\det X(a)=-a+1.\det X(a)=0\Rightarrow -a+1=0\Rightarrow a=1$. **2.** a) $f(2)=0\Rightarrow f$ este divizibil cu $X-2$. b) Câtul este $X-3$ şi restul este 2. c) Din relaţiile lui Viete avem:

$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=4\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=3\\ x_1x_2x_3=-2\end{cases}$. Rezultă $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}=-\frac{3}{2}$.

SUBIECTUL AL III-LEA

Scanned with OKEN Scanner

a) $f'(x)=1+\frac{2}{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2+2}{x^2}, x\in(0,+\infty)$. b) $\left.\begin{matrix}x^2>0,\forall x\in(0,\infty)\\ x^2+2>0,\forall x\in(0,\infty)\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)>0, x\in(0,\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(0,\infty)$. c) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\Rightarrow$ graficul nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$. $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)=1, n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{x}\right)=0$. Rezultă că dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției. **2.** a) $\int_1^2 x\cdot f(x)\,dx=\int_1^2\left(x^2+1\right)dx=\int_1^2 x^2dx+\int_1^2 1dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2+x\Big|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}+2-1=\frac{10}{3}$. b)

$F'(x)=\left(\frac{x^2}{2}\right)'+(\ln x)'=\frac{2x}{2}+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}\Rightarrow F'(x)=f(x),\forall x\in(0,\infty)\Rightarrow F$ este primitivă a funcției f. c) $\left.\begin{matrix}\text{Aria}=\int_1^2|f(x)|\,dx\\ f(x)>0,\forall x\in(1,2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \text{Aria}=\int_1^2 f(x)\,dx=F(x)\Big|_1^2=F(2)-F(1)=$

$=2+\ln 2-\frac{1}{2}-\ln 1=\frac{3}{2}+\ln 2$.

VARIANTA 09

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Din $b_3=b_1\cdot q^2$ se obține $3q^2=12$. Se obține $q^2=2$, $b_5=b_1q^4=3\cdot 16=48$.

2. $\Delta=-8-4m<0\Rightarrow m\in(-2,\infty)$. **3.** Ecuația se scrie sub forma $5\cdot 3^{2x}-8\cdot 3^x\cdot 5^x+3\cdot 5^{2x}=0$.

Se împarte cu 5^{2x} și se obține $5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{2x}-8\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x+3=0$. Se obține $\left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{3}{5}$ și $x=1$, respectiv $\left(\frac{3}{5}\right)^x=1$ și $x=0$. **4.** Numărul submulțimilor $=C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3=1+5+10+10=26$. **5.**

$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=2$, $d\parallel BC\Rightarrow m_d=m_{BC}=2$. Ecuația dreptei d este:

$d: y-y_A=m_d(x-x_A)$, $d: 2x-y-5=0$. **6.** Din $BC>AC>AB\Rightarrow \hat{A}$ este cel mai mare;

$\cos\hat{A}=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=\frac{-1}{2}<0$, de unde rezultă că $\hat{A}$ este obtuz.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $X(3)=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&2&-1\\1&-3&-1\end{pmatrix}$ și $\det X(3)=-5$.

b) $X(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det X(a)=4-a^2\neq 0$. Se obține $a\neq\pm 2$.

c) Pentru $a=3$, $\det A\neq 0$ deci sistemul este compatibil determinat cu soluția:

$S=\left\{\left(-\frac{4}{5};\frac{2}{5};-3\right)\right\}$. **2.** a) $x\circ y=xy-4x-4y+20=(x-4)(y-4)+4$. "$\circ$" este asociativă

Scanned with OKEN Scanner

$\Leftrightarrow (x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$. $(x\circ y)\circ z = (x-4)(y-4)(z-4)+4, \forall x,y,z\in\mathbb{R}$,
$x\circ(y\circ z) = (x-4)(y-4)(z-4)+4,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

b) $e=5$ element neutru, rezultă că $x\circ 5 = 5\circ x = x,\ \forall x\in\mathbb{R}$, $x\circ 5 = 5x-4x-5a+20$. Se obţine $a=4$.

c) $x\circ(x+2) = (x-4)(x-2)+4$. Inecuaţia se scrie astfel: $(x-4)(x-2)\le 0,\ x\in\mathbb{Z}$. Se obţine $x\in[2,4]\cap\mathbb{Z}$, adică $x\in\{2,\ 3,\ 4\}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x) = \dfrac{(x-2)'e^x - (x-2)(e^x)'}{e^{2x}} = \dfrac{3-x}{e^x}, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, rezultă că $y=0$ este ecuaţia asimptotei către $+\infty$. c) $f'(x)=0\Rightarrow x=3$ şi $x=3$ este punct de maxim local $\Rightarrow f(x)\le f(3),\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)\le\dfrac{1}{e^3}, \forall x\in\mathbb{R}$..

2. a) $\int (x+2)^2 f_1(x)\,dx = \int (x+2)\,dx = \dfrac{x^2}{2}+2x+C$.

b) $\int\limits_0^1 x f_2(x)dx = \int\limits_0^1 \dfrac{x}{x^2+2}dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_2^3 \dfrac{dt}{t} = \dfrac{1}{2}\ln t\Big|_2^3 = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$.

c) $f_{2013}(x)\,dx = \dfrac{1}{x^{2013}+2},\ \forall x\in[0,1]$. Din $x\in[0,1]\Rightarrow x^{2013}\in[0,1]\Rightarrow x^{2013}+2\in[2,3]$ şi $\dfrac{1}{x^{2013}+2}\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$. Rezultă că: $\dfrac{1}{3}(1-0)\le\int\limits_0^1 f_{2013}(x)\,dx\le\dfrac{1}{2}(1-0)$, deci $\int\limits_0^1 f_{2013}(x)\,dx\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$.

VARIANTA 10

SUBIECTUL I

1. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{2} = \sqrt{\dfrac{7+1}{2}}+\sqrt{\dfrac{7-1}{2}}-\sqrt{\dfrac{5+1}{2}}+\sqrt{\dfrac{5-1}{2}}-\sqrt{2} =$
$=\sqrt{4}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\in\mathbb{N}$. **2.** Notăm numărul cu A şi obţinem $A=\log_5\left(\dfrac{1}{5}\dfrac{5}{8}\dfrac{8}{13}\dfrac{13}{19}\dfrac{19}{25}\right)=\log_5\dfrac{1}{25}=-2$. **3.** $x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}, x_1x_2=\dfrac{c}{a}$ şi deci $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{2014}{1007}=2$. **4.** $a_6=a_1+5r\Rightarrow 6=-14+5r\Rightarrow\Rightarrow r=4$, $a_{508}=a_1+507r\Rightarrow a_{508}=2014$.

5. $\sin^2 40^0+\cos^2 140^0=\sin^2 40^0+\cos^2(180^0-140^0)=\sin^2 40^0+\cos^2 40^0=1$ şi $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}$.

6. $A=\dfrac{a\cdot c\cdot\sin B}{2}\Rightarrow A=\dfrac{8\cdot 6\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=24$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $\det A=\begin{vmatrix}2m & 1 & 1\\ 1 & m & -1\\ 1 & 2m & 1\end{vmatrix}=6m^2+m-2$. Sistemul este de tip Cramer $\Leftrightarrow \det A\neq 0\Leftrightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right\}$. b) Dacă $(0,-1,1)$ este soluție a sistemului, atunci verifică toate ecuațiile din sistem și obținem $0-m+1=1\Leftrightarrow m=0$. c) Pentru $m=1$ se obține $\det A=5$ și se aplică regula lui Cramer, $d_x=-3, d_y=2, d_z=4$ și deci soluția sistemului este $(x,y,z)=\left(-\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$.

2. a) $x\circ y=xy-3x-3y+9+3=x(y-3)-3(y-3)+3=(x-3)(y-3)+3, \forall x,y\in G$; b) $x\in(3,\infty), y\in(3,\infty)\Leftrightarrow x-3>0$ și $y-3>0\Leftrightarrow(x-3)(y-3)>0\Leftrightarrow(x-3)(y-3)+3>3\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\circ y\in G, \forall x,y\in G$ și deci G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea dată. c) $x\in G$ este simetrizabil în raport cu legea dată dacă $\exists\, x'\in G$ așa încât $x\circ x'=x'\circ x=e$, unde e este elementul neutru. Element neutru: $x\circ e=e\circ x=x, \forall x\in G\Rightarrow x\circ e=x\Rightarrow$

$\Rightarrow(x-3)(e-3)+3=x\Rightarrow e=4$, $x'\circ x=4\Rightarrow x'=\frac{1}{x-3}+3>3\Rightarrow x'\in G\Rightarrow U(G)=G$.

SUBIECTUL AL III-LEA

a) f continuă în $x=1\Rightarrow l_s(1)=l_d(1)=f(1)\Rightarrow 1=a+\ln 1\Rightarrow a=1$. b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-a}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a+\ln x-a}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\text{L'Hopital}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$. c) $x\in(0,1)\Rightarrow f'(x)=12x^2-6x$. Din $f'(x)=0\Rightarrow x=0$ și $x=\frac{1}{2}$. Din tabelul de semn pentru derivată se obține că f este descrescătoare pe intervalul $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ și crescătoare pe $\left(\frac{1}{2},1\right)$. Punctul $M\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ este punct de minim local. **2.** a) F este primitivă a lui $f\Leftrightarrow F'(x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}, F'(x)=$

$=\left(xe^x\right)'=e^x+xe^x=e^x(x+1)=f(x)$, deci F este primitivă a lui f. b) $\int\limits_0^1 f(x)F(x)\,dx=$

$=\int\limits_0^1 F'(x)F(x)\,dx=\frac{F^2(x)}{2}\Big|_0^1=\frac{e^2}{2}$. c) $A_f=\int\limits_0^1 f(x)\,dx=F(x)\Big|_0^1=e$.

VARIANTA 11

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Cele trei numere sunt în progresie aritmetică dacă $x+3=\frac{x-2+3x-2}{2}$ adică $x=5$.

2. Avem $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]$, dar $x\in\mathbb{Z}$ și rezultă $x\in\{0,1,2\}$. **3.** Din condiții $3x+1>0$ și $x-3>0\Rightarrow x\in(3,\infty)$. Ecuația devine $\frac{3x+1}{x-3}=8$, de unde $x=5\in(3,\infty)$.

4. Se notează prețul inițial cu x. Atunci $x+\frac{10}{100}x=660$, de unde $x=600lei$.

5. Ecuația dreptei este $3x-2y+7=0$.

6. $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\cos x=\pm\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\pm\frac{3}{5}$, dar $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow\cos x=-\frac{3}{5}$ deci $tgx=-\frac{4}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) Matricea sistemului este $A=\begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ m+1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ şi are $\det(A)=3m+2$.

b) Pentru ca sistemul să admită soluţie unică trebuie ca $\det(A)\neq 0$, adică $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

c) Aplicăm regula lui Cramer $\det A=5$, $\Delta_x=4$, $\Delta_y=-3$, $\Delta_z=-12$. Rezultă că $S=\left\{\left(\frac{4}{5},\frac{-3}{5},\frac{-12}{5}\right)\right\}$. **2.** a) $x^3+x-2=0\Rightarrow(x-1)(x^2+x+2)=0$ şi rezultă $x=1$ soluţie în $\mathbb{R}$. b) $f(2)=0$, rezultă $m=-\frac{7}{2}$.

c) Avem din relaţiile lui Viete: $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m$; se obţine că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=-2m$ şi $-2m=4$ dacă $m=-2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) Avem că $f'(x)=\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$ şi $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{2}{3}$.

b) Avem $l_s(-2)=-\infty$ şi $l_d(-2)=\infty$, deci $x=-2$ este asimptotă verticală. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ rezultă că nu avem asimptotă orizontală. Calculăm asimptota oblică $y=mx+n$ unde $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ şi $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=-2$. Deci dreapta de ecuaţie $y=x-2$ este asimptotă oblică. c) Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în $(x_0,f(x_0))\in G_f$ este $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. În cazul nostru $x_0=1$, $f'(1)=\frac{2}{3}$ şi $f(1)=0$. Deci ecuaţia tangentei este: $2x-3y-2=0$. **2.** a) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+x\ln x$ este derivabilă pe $(0,\infty)$ şi $f'(x)=(x+x\ln x)'=2+\ln x=g(x)$. Rezultă că f este o primitivă a lui g.

b) $\int_1^e f(x)g(x)dx=\int_1^e f(x)f'(x)dx=\frac{f^2(x)}{2}\Big|_1^e=\frac{f^2(e)-f^2(1)}{2}=\frac{(e+e\ln e)^2-1}{2}=$

$=\frac{4e^2-1}{2}$. c) $A=\int_1^e g(x)dx=2e-1$.

VARIANTA 12

SUBIECTUL I

1. Se pun condiţiile $-1\le 3-x\le 1$. Rezultă că $x\in[2,4]$.

2. $\sqrt{x+16}=x-4$. Condiţii de existenţă: $\begin{cases}x+16\ge 0\\ x-4\ge 0\end{cases}\Rightarrow x\in[4,+\infty)$. Avem că

$\sqrt{x+16}=x-4\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+16}\right)^2=(x-4)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+16=x^2-8x+16\Leftrightarrow x^2-9x=0\Leftrightarrow x_2=9\in[4,+\infty)$. Soluţia $S=\{9\}$.

Scanned with OKEN Scanner

3. $\lg(x+1)-2\lg(x-1)=1$. Condiţii de existenţă:

$\begin{cases} x+1>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Rightarrow x\in(1,+\infty).\lg(x+1)-2\lg(x-1)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lg(x+1)-\lg(x-1)^2=1 \Leftrightarrow \lg\dfrac{x+1}{(x-1)^2}=\lg 10 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{(x-1)^2}=10 \Leftrightarrow x+1=10x^2-20x+10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10x^2-21x+9=0$ cu soluţiile $x\in\left\{\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{5}\right\}$. Soluţie convenabilă, $x=\dfrac{3}{2}\in(1,+\infty)$.

4. Se rezolvă ecuaţia $C_n^2+A_n^2=30$ unde

$n\geq 2, n\in\mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}+\dfrac{n!}{(n-2)!}=30 \Leftrightarrow \dfrac{(n-2)!\cdot(n-1)n}{(n-2)!\cdot 1\cdot 2}+\dfrac{(n-2)!\cdot(n-1)n}{(n-2)!}=30 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2-n+2n^2-2n-60=0 \Leftrightarrow n^2-n-20=0 \Leftrightarrow n=5$. $P=\dfrac{\text{cazuri favorabile}}{\text{cazuri posibile}} \Rightarrow P=\dfrac{1}{5}$.

5. $d_1\perp d_2 \Leftrightarrow m_1\cdot m_2=-1 \Leftrightarrow 2m+3=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{2}$. **6.** $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}=\vec{i}-2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=(x_C-x_B)\vec{i}+(y_C-y_B)\vec{j}=-3\vec{i}+5\vec{j}$. Se obţine $\vec{u}=-3\vec{i}+8\vec{j}$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) Ecuaţia dreptei A_0A_1: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$. Se obţine succesiv: $-2x+y+1=0 \Leftrightarrow y=2x-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow m_{A_0A_1}=2$. b) $A_{(A_2A_3B)}=\dfrac{1}{2}|\Delta|$. Deoarece $A_2(2,3), A_3(3,5), B(-1,0)$ şi $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{(A_2A_3B)}=\dfrac{1}{2}|3|=\dfrac{3}{2}$. c) $(A_0A_1): -2x+y+1=0, C(m,3)\in(A_0A_1) \Leftrightarrow -2m+3+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m=2 \Rightarrow C(2,3)$. **2.** a) $x*y=xy-5x-5y+30=xy-5x-5y+25+5=$

$=x(y-5)-5(y-5)+5=(x-5)(y-5)+5$ (adevărat). b) $5^x*25^x=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (5^x-5)(25^x-5)+5=5 \Leftrightarrow (5^x-5)(25^x-5)=0 \Rightarrow 5^x-5=0$ cu soluţia $x=1\in\mathbb{Z}$.

$25^x-5=0 \Leftrightarrow 5^{2x}-5=0 \Leftrightarrow 5^{2x}=5 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\notin\mathbb{Z} \Rightarrow S=\{1\}$. c) Din relaţia dată se obţine că $xy-5x-5y+30+m=xy+mx+my+m^2, \forall x,y\in\mathbb{R}$, deci $m=-5$ şi $f(x)=x-5$.

SUBIECTUL AL III-LEA

1. a) $f'(x)=\dfrac{(x+2)'(x-3)-(x-3)'(x+2)}{(x-3)^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{x-3-x-2}{(x-3)^2}=\dfrac{-5}{(x-3)^2}<0,$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$. Deoarece $f'(x)<0, \forall x\in(3,+\infty) \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(3,+\infty)$. b)

Asimptota verticală: $\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x>3}}\dfrac{x+2}{x-3}=\dfrac{5}{0_+}=+\infty$, deci $x=3$ este asimptotă verticală. Asimptote

Scanned with OKEN Scanner

orizontale: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+2}{x-3}=1\Rightarrow y=1$ asimptotă orizontală. c) $m=f'(1)=\dfrac{-5}{4}$.

2. a) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{x+3-x-2}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$ (adevărat).

b) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)dx=\ln|x+2|\Big|_0^1-\ln|x+3|\Big|_0^1=\ln\left|\dfrac{x+2}{x+3}\right|\Big|_0^1=\ln\dfrac{3}{4}-\ln\dfrac{2}{3}=\ln\dfrac{9}{8}$.

c) $h(x)=f(x)+\dfrac{1}{x+3}\Rightarrow h(x)=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{x+2}$, $A=\int_2^3 h(x)dx\Rightarrow A=\int_2^3\dfrac{1}{x+2}dx=$

$\ln|x+2|\Big|_2^3=\ln 5-\ln 4=\ln\dfrac{5}{4}$.

VARIANTA 13

SUBIECTUL I

1. Din $[x-1]=-1$ deducem $x-1\in[-1,0)$ adică $\begin{cases}x-1\geq -1\\ x-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x<1\end{cases}$ de unde $x\in[0,1)$.

2. Observăm că şirul este o progresie aritmetică cu $a_1=1$ şi $r=7$. Din $a_n=a_1+(n-1)r$, luând $n=10$ obţinem $a_{10}=a_1+9r$ adică $a_{10}=1+9\cdot 7=64$. **3.** Scriem ecuaţia sub formele echivalente $\left(2^3\right)^x=\left(2^2\right)^{\frac{x}{2}+1}\Leftrightarrow 2^{3x}=2^{x+2}$ de unde $3x=x+2$ şi deducem $x=1$. **4.** Folosim metoda subsistituţiei. Avem, din prima ecuaţie, $y=5-2x$. Din a doua ecuaţie se obţine că $3x+2(5-2x)=8\Leftrightarrow -x=-2$, deci $x=2$ şi $y=5-2\cdot 2=1$. Rezultă că $x^2+y^2=4+1=5$.

5. $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}=3\vec{i}-4\vec{j}$ de unde $a=3$ şi $b=-4$. **6.** Din teorema cosinusului $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$ obţinem $25=16+36-48\cos B$, de unde $\cos B=\dfrac{27}{48}$ adică $\cos B=\dfrac{9}{16}$. Analog se calculează $\cos C$ şi apoi $\sin C$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. b) $A^2=\begin{pmatrix}11 & 12 & -3\\ 2 & 4 & 4\\ 6 & 6 & 2\end{pmatrix}$. c) $\det A=10, d_x=-7, d_y=5, d_z=-9$. Se obţine soluţia:

$x=-\dfrac{7}{10}, y=\dfrac{1}{2}, z=-\dfrac{9}{10}$. **2.** a) Fie $x;y\in G\Rightarrow(\exists)a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbb{Z}$ cu $a_1^2-7b_1^2=1$ şi $a_2^2-7b_2^2=1$ a.î. $x=a_1+b_1\sqrt{7}$ şi $y=a_2+b_2\sqrt{7}$. A arăta că $x\cdot y\in G$ înseamnă a arăta că $(\exists)m;n\in\mathbb{Z}$ a.î. $x\cdot y=m+n\sqrt{7}$ şi $m^2-7n^2=1$.

$x\cdot y=\left(a_1+b_1\sqrt{7}\right)\cdot\left(a_2+b_2\sqrt{7}\right)=a_1a_2+7b_1b_2+(a_2b_1+a_1b_2)\sqrt{7}$. Considerând $m=a_1a_2+7b_1b_2$ şi $n=a_2b_1+a_1b_2$, avem $m;n\in\mathbb{Z}$ căci $a_1;b_1;a_2;b_2\in\mathbb{Z}$. Relaţia $m^2-7n^2=1\Leftrightarrow$ $(a_1a_2+7b_1b_2)^2-7(a_2b_1+a_1b_2)^2=1\Leftrightarrow\left(a_1^2-7b_1^2\right)\left(a_2^2-7b_2^2\right)=1$, adevărat, deci: $x\cdot y\in G$. b) Luând $a=8\in\mathbb{Z}$ şi $b=-3\in\mathbb{Z}$, condiţia $a^2-7b^2=1$ revine la $8^2-7\cdot(-3)^2=1$ adică $64-63=1$, adevărat, deci $8-3\sqrt{7}\in G$. c) Fie $x=a+b\sqrt{7}\in G$. $x\cdot x'=1\Leftrightarrow\left(a+b\sqrt{7}\right)\cdot x'=1\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$$x'=\frac{1}{a+b\sqrt{7}}=\frac{a^2-7b^2}{a+b\sqrt{7}}=\frac{\left(a+b\sqrt{7}\right)\left(a-b\sqrt{7}\right)}{a+b\sqrt{7}}=a-b\sqrt{7}\in G.$$

SUBIECTUL AL III-LEA

1. a) Funcţia f este funcţie raţională elementară, deci derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Se obţine că

$$f'(x)=\frac{\left(x^2\right)'(x-1)-x^2\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2},x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}.$$ b) Tabelul de variaţie a funcţiei:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\underset{\max}{0}$	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	$\underset{\min}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Din tabel observăm că f este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty,0)$ şi $(2,+\infty)$ şi strict descrescătoare pe intervalele $(0,1)$ şi $(1,2)$. c) Din tabelul de variaţie constatăm că $x=2$ este punct de minim local pe $(1+\infty)$ de unde $f(x)\geq 4,(\forall)x>1$. **2.** a) $f_{|(-\infty;0)}$ şi $f_{|(0;\infty)}$ sunt continue pe domeniile lor de definiţie ca diferenţe de funcţii elementare continue. Se verifică continuitatea în $x=0$. Avem că $l_s(0)=l_d(0)=f(0)=-1$. Rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$ de unde rezultă că f admite primitive pe $\mathbb{R}$. b) $\int_{-1}^{0}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left(x^3-xe^x\right)\mathrm{d}x=$

$$\int_{-1}^{0}x^3\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}xe^x\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0}-e^x(x-1)\Big|_{-1}^{0}=\frac{3}{4}-\frac{2}{e}.$$ c) $V(c_f)=\pi\int_0^1 g^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}-1\right)^2\mathrm{d}x=$

$=\pi\int_0^1\left(x+1-2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$ şi, prin calcul, obţinem $V(c_f)=\pi\left(\frac{x^2}{2}+x-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}$.

VARIANTA 14

SUBIECTUL I

1. $\log_3 7-\log_3 2=\log_3\frac{7}{2}$. Avem că $3<\frac{7}{2}<3^2$ şi $\log_3 3<\log_3\frac{7}{2}<\log_3 9$. Rezultă că $1<\log_3\frac{7}{2}<2$, deci $\left[\log_3\frac{7}{2}\right]=1$. **2.** $|1-2x|\leq 5\Leftrightarrow -5\leq 1-2x\leq 5\,|-1\Leftrightarrow -6\leq -2x\leq 4\,|:(-2)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3\geq x\geq -2$. Aşadar, $x\in[-2,3]$ şi $A=[-2,3]\cap\mathbb{N}=\{0,1,2,3\}$. Cel mai mare element al mulţimii A este 3. **3.** $3^{x^2-2x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x-4}\Leftrightarrow 3^{x^2-2x}=\left(-3^{-1}\right)^{-x-4}\Leftrightarrow 3^{x^2-2x}=3^{x+4}\Leftrightarrow x^2-2x=$

$=x+4\Leftrightarrow x^2-3x-4=0$. Se obţine soluţia $x_1=-1,x_2=4$. **4.** $S_{10}=\frac{(a_1+a_{10})\cdot 10}{2}=$

$=(2a_1+9r)\cdot 5$. Dar $a_5=a_1+(5-1)r$, adică $2=a_1+4(-2)$. Se obţine $a_1=10$ şi $S_{10}=10$.

5. $\triangle ABC$ echilateral cu $S_{ABC}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$. Avem $\sqrt{3}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow AB^2=4$, deci $AB=2$. Dar

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}\Leftrightarrow 2=\sqrt{(-2-x)^2+(3-1)^2}\Leftrightarrow 4=(2+x)^2+4\Leftrightarrow(2+x)^2=0\Leftrightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Leftrightarrow x=-2$. **6.** Avem că $\cos 135^0=\cos\left(180^0-45^0\right)=-\cos 45^0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi $\sin\frac{11\pi}{6}=$ $\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$. Se obţine suma $\frac{-\sqrt{2}+1}{2}$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $A(1)+A(-2)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ \frac{1}{2} & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -\frac{1}{2} & -7\end{pmatrix}$ şi $\det\left(A(1)+A(-2)\right)=\begin{vmatrix}3 & 4\\ -\frac{1}{2} & -7\end{vmatrix}=$

$=-21+\frac{4}{2}=-21+2=-19$. b) $A^2(-3)=A(-3)\cdot A(-3)=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -\frac{3}{2} & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2\\ -\frac{3}{2} & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -4\\ 3 & 33\end{pmatrix}$ şi

$A^2(-3)+2I_2=\begin{pmatrix}13 & -4\\ 3 & 33\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & -4\\ 3 & 35\end{pmatrix}$. Rezultă că $\mathrm{Tr}\left(A^2(-3)+2I_2\right)=15+35=50$.

c) Deoarece $\det A(0)=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{vmatrix}=-3\neq 0$, rezultă că $A(0)$ este inversabilă, iar soluţia ecuaţiei matriceale este $X=\left(A(0)\right)^{-1}A(-2)$. Avem $'A(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}, \left(A(0)\right)^*=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi

$\left(A(0)\right)^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Se obţine că $X=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -5\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-7 & 4\\ -1 & -5\end{pmatrix}$.

2. a) Avem că $(x-6)(y-6)+6=xy-6x-6y+36+6=x\circ y, \forall x,y\in\mathbb{R}$. b) M este parte stabilă faţă de legea "$\circ$" dacă $(\forall)x,y\in M\Rightarrow x\circ y\in M$. Din $x,y\in M=(6,+\infty)\Rightarrow x>6, y>6$ $\Rightarrow (x-6)(y-6)>0\Rightarrow (x-6)(y-6)+6>6$, adică $x\circ y>6$. Aşadar $x\circ y\in M$. c) Se determină mai întâi elementul neutru $e=7$. Fie $x\in M$ şi x' simetricul lui. Se obţine succesiv:

$x\circ x'=x'\circ x=e\Rightarrow (x-6)(x'-6)+6=(x'-6)(x-6)+6=7\Rightarrow$ $\Rightarrow x'-6=\frac{1}{x-6}, x\in(6,\infty)$ şi

$x'=6+\frac{1}{x-6}\in M, \forall x\in(6,+\infty)$.

SUBIECTUL AL III-LEA

1. a) $f'(x)=\left(\ln(x-2)+\frac{1}{x-2}\right)'=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{x-2-1}{(x-2)^2}=\frac{x-3}{(x-2)^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=\frac{3-3}{(3-2)^2}=0$ .c) $f'(x)=\frac{x-3}{(x-2)^2}$ .Tabelul de variaţie a funcţiei f este

x	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-\!-\!-\!-\!-\!-\!-$	0	$+\!+\!+\!+\!+\!+\!+\!+\!+$
$f(x)$	$\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow$	1	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$

Aşadar f este descrescătoare pe intervalul $(2,3)$ şi strict crescătoare pe intervalul $(3,+\infty)$.

2. a) Funcţia f este continuă pe intervalele $(-\infty,0)$ şi $(0,+\infty)$ fiind exprimată cu funcţii

Scanned with OKEN Scanner

elementare. Studiem continuitatea în $x=0$. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(4x^3-2x+1\right)=1, \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^x=1$

şi $f(0)=1\Rightarrow f$ continuă în $x=0$, deci pe $\mathbb{R}$. Atunci f admite primitive pe $\mathbb{R}$. b)

$$\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx=\int_{-2}^{-1}\left(4x^3-2x+1\right)dx=\left(4\frac{x^4}{4}-2\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-2}^{-1}=\left(x^4-x^2+x\right)\Big|_{-2}^{-1}=(1-1-1)-(16-4-2)=-11.$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\left(f(t)-1\right)dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\left(e^t-1\right)dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-x-1}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{1}=+\infty$.

VARIANTA 15

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Aplicând formula sumei de n termeni ai unei progresii aritmetice, pentru cazul $n=20$, avem $S_{20}=\left(\frac{a_1+a_{20}}{2}\right)\cdot 20$, unde, $a_{20}=a_1+19r=8+19\cdot 5=103$. Înlocuind obţinem $S_{20}=(8+103)10=1110$. **2.** Maximul funcţiei se calculează cu formula $y_V=\frac{-\Delta}{4a}=20$.

3. Folosind formula de ridicare la pătrat a unui binom, se obţine valoarea $18\in\mathbb{N}$.

4. Ţinând cont de proprietatea paralelogramului că diagonalele se înjumătăţesc, punctul căutat O se află la mijlocul segmentului AC. Drept urmare, se calculează cu formulele de calcul ale mijlocului unui segment: $x_O=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{3-1}{2}=1$, $y_O=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}$. Deci punctul căutat are coordonatele $O\left(1,\frac{5}{2}\right)$. **5.** Probabilitatea $P=\frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

6. Cu regula poligonului se obţine $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}$ şi $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}$. Rezultă că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DM}\right)+2\overrightarrow{MN}+\left(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right)=\vec{0}+2\overrightarrow{MN}+\vec{0}=2\overrightarrow{MN}$. Aşadar, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-2\overrightarrow{MN}=\vec{0}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) Pentru $a=1$, $b=0$ condiţia este îndeplinită.

b) Fie matricele $A=\begin{pmatrix}a & b\\ 3b & a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}c & d\\ 3d & c\end{pmatrix}$, $a^2-3b^2=1$, $c^2-3d^2=1$,

$AB=\begin{pmatrix}ac+3bd & ad+bc\\ 3(bc+ad) & 3db+ac\end{pmatrix}$. Dacă $a, b, c, d\in\mathbb{Q}\Rightarrow ac+3bd,\ ad+bc\in\mathbb{Q}$. Arătăm că: $(ac+3bd)^2-3(ad+bc)^2=1$. Prin ridicare la putere şi grupând corespunzător termenii, expresia devine: $a^2c^2+6abcd+9b^2d^2-3a^2d^2-6abcd-3b^2c^2=c^2\left(a^2-3b^2\right)-3d^2\left(a^2-3b^2\right)=$

$=\left(a^2-3b^2\right)\left(c^2-3d^2\right)=1$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

c) Matricea X este nesingulară, deoarece determinantul ei este nenul (din definiţia mulţimii G), deci X este inversabilă. Înmulţind, $XX^{-1}=I_2$.

2. a) $\left(X-\sqrt{3}\right)^2\left(X+\sqrt{3}\right)^2=\left(X^2-3\right)^2=X^4-6X^2+9=f+8$.

b) Prima relaţie a lui Viete înseamnă $x_1+x_2+x_3+x_4=\left(-\frac{b}{a}\right)=0$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Ridicând la pătrat prima relaţie a lui Viete, obţinem:
$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2(x_1x_2+x_3x_4+x_1x_4+x_1x_3+x_2x_3+x_2x_4)=0$. Avem că
$x_1x_2+x_3x_4+x_1x_4+x_1x_3+x_2x_3+x_2x_4=\left(\frac{c}{a}\right)=-6$. Înlocuind obţinem $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=12$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) Înlocuind expresiile corespunzătoare, prin calcul algebric, rezultă egalitatea cerută.

b) Calculăm limta funcţiei la $\pm\infty$ şi avem $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$, deci dreapta de ecuaţie $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ şi $-\infty$.

c) Pentru rezolvarea inegalităţii avem nevoie de derivata întâi a funcţiei f.

$f'(x)=\frac{6x^2-18}{\left(x^2+3x+3\right)^2}$, $f'(x)=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

Se întocmeşte tabelul de monotonie a funcţiei:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+++++++++++++$	0	$----------$	0	$++++++++++++$		
$f(x)$	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$		$f(-\sqrt{3})$	$\searrow\searrow\searrow\searrow$	$7-4\sqrt{3}$	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$	

Funcţia este crescătoare pe $[2,+\infty)$, deci $f(x)\geq f(2)=\frac{1}{13}$, $\forall x\geq 2$.

2. a) $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x+4}\right)dx=\ln(x+3)\Big|_1^2=\ln\frac{5}{4}$.

b) $A=\int_1^3|f(x)|dx=\left[\ln(x+3)+\ln(x+4)\right]\Big|_1^3=\ln\frac{21}{10}$.

c) $V=\pi\int_0^1\frac{1}{(x+4)^2}dx=\frac{-\pi}{x+4}\Big|_0^1=-\pi\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{20}$.

VARIANTA 16

SUBIECTUL I

1. $x-2,x,8$ verifică egalitatea $x^2=8(x-2)$ sau $x^2-8x+16=0$ cu soluţia $x=4$. **2.** $A(a,3)\in G_f\Leftrightarrow f(a)=3$ se obţine $a^2-1=3$ cu soluţia $a\in\{-2,2\}$. **3.** $3^{2x-1}=27\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3^{2x-1}=3^3\Leftrightarrow 2x-1=3\Leftrightarrow x=2$. **4.** $P=\frac{\text{nr. caz. favorabile}}{\text{nr. caz. posibile}}$. Mulţimea cazurilor posibile $\{0,1,2,...,99\}$, are 100 elemente. Mulţimea cazurilor favorabile este $\{0,1^2,2^2,...,9^2\}$ şi are 10 elemente. Atunci $P=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$. **5.** $d: ax+by-3=0$. Rezultă că $A(1,1)\in d\Rightarrow a+b-3=0$ şi $B(2,-1)\in d\Rightarrow 2a-b-3=0$. Rezolvând sistemul obţinut obţinem $a=2,b=1$. **6.** $A_{\triangle}=\frac{AB\cdot BC\cdot\sin 45^0}{2}$. Astfel avem că $15=\frac{5\sqrt{2}\cdot BC\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$, deci $30=5\cdot BC$ şi $BC=6$.

SUBIECTUL al II-lea

Scanned with OKEN Scanner

1. a) $A=I_2=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A+I_2)=\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-3$. b) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 7\end{pmatrix}$. $A^2-B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & x-2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5-x\\ 2 & 4\end{pmatrix}$. Obţinem că

$\begin{vmatrix}3 & 5-x\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 12-2(5-x)=0$ cu soluţia $x=-1$. c) Pentru $x=2$ obţinem $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ şi

$\det B=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{vmatrix}=3$, deci B are inversă. Se obţine că ${}^tB=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}, B^*=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi

$B^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. **2.** a) $f\vdots x+1\Leftrightarrow f(-1)=0$. Avem că: $f(-1)=2\cdot(-1)^3-(-1)^2+3=0$, deci

$f\vdots x+1$. b) cu algoritmul general de împărţire a polinoamelor se obţine câtul $q=2X-1$ şi restul

$r=4X+1$. c) Cu relaţiile lui Viete $x_1+x_2+x_3=\frac{1}{2}$; $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0$ şi $x_1x_2x_3=-\frac{3}{2}$ se

obţine că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{1}{4}-2\cdot 0=\frac{1}{4}$ şi $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}=\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{3}=-\frac{1}{3}$. Rezultă că

$a\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}$, deci $a=-\frac{4}{3}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(x+2)}{(2x-1)(3x+2)}=\frac{1}{6}$; b) $f'(x)=(x+2)'\sqrt{x}+(x+2)\left(\sqrt{x}\right)'=\sqrt{x}+\frac{x+2}{2\sqrt{x}}=\frac{3x+2}{2\sqrt{x}}$;

c) Ecuaţia tangentei la G_f în punctul de abscisă $x_0=1$ se scrie $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ sau

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$. Se obţine că $y-3=\frac{5}{2}(x-1)$ sau $5x-2y+1=0$.

2. a) $\int_1^2\frac{x}{x+1}dx=\int_1^2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=x\Big|_1^2-\ln(x+1)\Big|_1^2=(2-1)-(\ln 3-\ln 2)=1-\ln\frac{3}{2}$; b)

$V=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=\pi\int_0^1(x+1)^2dx=\pi\int_0^1(x^2+2x+1)dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+x\Big|_0^1\right)=\pi\left(\frac{1}{3}+1+1\right)=$

$=\frac{7\pi}{3}$. c) Fie $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f. Funcţia F este derivabilă pe $[0,+\infty)$

şi avem că $F'(x)=f(x)=\frac{1}{x+1}$ şi $F''(x)=f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}<0,\forall x\in[0,+\infty)$. Aşadar F este

concavă pe $[0,+\infty)$.

VARIANTA 17

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Din $a_5=3$ se obţine că $a_1+4r=3$. Avem că $S_9=\frac{a_1+a_9}{2}\cdot 5=\frac{2a_1+8r}{2}\cdot 5=$

$(a_1+4r)\cdot 5=3\cdot 5=15$. **2.** Avem: $3-2x\geq 3+2$, deci $-2x\geq 2\Rightarrow x\leq -1$ şi $x\in(-\infty,-1]$.

3. Se obţine ecuaţia: $z^2-2z+5=0$ cu $\Delta=4-20=-16$. Soluţiile sunt

Scanned with OKEN Scanner

1. a) $A=I_2=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A+I_2)=\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-3$. b) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 7\end{pmatrix}$. $A^2-B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & x-2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5-x\\ 2 & 4\end{pmatrix}$. Obţinem că

$\begin{vmatrix}3 & 5-x\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 12-2(5-x)=0$ cu soluţia $x=-1$. c) Pentru $x=2$ obţinem $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ şi

$\det B=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{vmatrix}=3$, deci B are inversă. Se obţine că ${}^tB=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}, B^*=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi

$B^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. **2.** a) $f\vdots x+1\Leftrightarrow f(-1)=0$. Avem că: $f(-1)=2\cdot(-1)^3-(-1)^2+3=0$, deci

$f\vdots x+1$. b) cu algoritmul general de înpărţire a polinoamelor se obţine câtul $q=2X-1$ şi restul

$r=4X+1$. c) Cu relaţiile lui Viete $x_1+x_2+x_3=\frac{1}{2}$; $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0$ şi $x_1x_2x_3=-\frac{3}{2}$ se

obţine că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{1}{4}-2\cdot 0=\frac{1}{4}$ şi $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}=\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{3}=-\frac{1}{3}$. Rezultă că

$a\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}$, deci $a=-\frac{4}{3}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(x+2)}{(2x-1)(3x+2)}=\frac{1}{6}$; b) $f'(x)=(x+2)'\sqrt{x}+(x+2)\left(\sqrt{x}\right)'=\sqrt{x}+\frac{x+2}{2\sqrt{x}}=\frac{3x+2}{2\sqrt{x}}$;

c) Ecuaţia tangentei la G_f în punctul de abscisă $x_0=1$ se scrie $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ sau

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$. Se obţine că $y-3=\frac{5}{2}(x-1)$ sau $5x-2y+1=0$.

2. a) $\int_1^2\frac{x}{x+1}dx=\int_1^2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=x\Big|_1^2-\ln(x+1)\Big|_1^2=(2-1)-(\ln 3-\ln 2)=1-\ln\frac{3}{2}$; b)

$V=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=\pi\int_0^1(x+1)^2dx=\pi\int_0^1(x^2+2x+1)dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+x\Big|_0^1\right)=\pi\left(\frac{1}{3}+1+1\right)=$

$=\frac{7\pi}{3}$. c) Fie $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f. Funcţia F este derivabilă pe $[0,+\infty)$

şi avem că $F'(x)=f(x)=\frac{1}{x+1}$ şi $F''(x)=f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}<0,\forall x\in[0,+\infty)$. Aşadar F este

concavă pe $[0,+\infty)$.

VARIANTA 17

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Din $a_5=3$ se obţine că $a_1+4r=3$. Avem că $S_9=\frac{a_1+a_9}{2}\cdot 5=\frac{2a_1+8r}{2}\cdot 5=$

$(a_1+4r)\cdot 5=3\cdot 5=15$. **2.** Avem: $3-2x\ge 3+2$, deci $-2x\ge 2\Rightarrow x\le -1$ şi $x\in(-\infty,-1]$.

3. Se obţine ecuaţia: $z^2-2z+5=0$ cu $\Delta=4-20=-16$. Soluţiile sunt

Scanned with OKEN Scanner

$z_{1,2}=\frac{2\pm i\sqrt{16}}{2}=1\pm 2i$. **4.** Fie n numărul de elemente ale mulțimii. Atunci numărul submulțimilor cu două elemente este $C_n^2=10$. Se obține $n=5$. Numărul submulțimilor ordonate cu 3 elemente este $A_5^3=5\cdot 4\cdot 3=60$.

5. Dacă $ABCD$ este paralelogram avem că segmentele $[AD]$ și $[BC]$ au același mijloc. Având $M_{AD}\left(\frac{-2+x}{2},\frac{1+y}{2}\right)$ și $M_{BC}\left(2,\frac{1}{2}\right)$ se obține că $x-2=4$ și $1+y=1$ deci $D(6,0)$.

6. $m(\hat{C})=30^\circ$. Dacă $D\in BC$, $AD\perp BC$ rezultă că $tgC=\frac{AD}{DC}$, deci $AD=DC\cdot tg30^\circ=\frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$. Se obține că $S=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{5\sqrt{3}}{6}=\frac{25\sqrt{3}}{12}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A^2=\begin{pmatrix}6&9\\-4&-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&9\\-4&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36-36&54-54\\24-24&36-36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O_2$.

b) Avem că $(I_2-3A)(I_2+3A)=I_2-9A^2=I_2$ și $(I_2+3A)(I_2-3A)=I_2-9A^2=I_2$, deci $(I_2-3A)^{-1}=I_2+3A$.c) $2A-xI_2=\begin{pmatrix}12&18\\-8&-12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12-x&18\\-8&-12-x\end{pmatrix}$ și

$\det(2A-xI_2)=\begin{vmatrix}12-x&18\\-8&-12-x\end{vmatrix}=x^2-144+144=x^2$. din $x^2=25$ se obține $x\in\{-5,5\}$.

2. b) $(x-1)\circ(x+2)=7\Leftrightarrow x^2-5x=0$ cu soluțiile $x\in\{0;5\}$.

c) Se observă că $x\circ 3=3$ și $3\circ x=3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Atunci folosind asociativitatea operației "$\circ$" se obține că $\big((-1)\circ 0\circ 1\circ 2\big)\circ 3\circ 4=3\circ 4=3$ iar $4\circ 2=2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f(x)=x+2+\frac{4}{x+1}$. Asimptota este $y=x+2$.

b) $f'(x)=\frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}$. Ecuația $f'(x)=0$ se scrie $(x+1)^2=4$ cu soluțiile $x=1$ și $x=-3$. Din tabelul de semn se obține că f este crescătoare pe intervalele $(-\infty,-3]$ și $[1,+\infty)$ și descrescătoare pe intervalele $[-3,-1)$ și $(-1,1]$.

c) Panta perpendicularei este $m=-1$. Atunci trebuie ca $g'(x_0)=-1$. Se obține că $\frac{x_0^2+2x_0-3}{(x_0+1)^2}=-1$ sau $x_0^2+2x_0-3+x_0^2+2x_0+1=0$, de unde $2x_0^2+4x_0-2=0$ cu soluțiile $x_0\in\{-1\pm\sqrt{2}\}$.

2. a) $f(x)=F'(x)=\big((x^2+x+1)\cdot e^x\big)'=(x^2+3x+2)\cdot e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $A=\int_1^2 g(x)dx=\int_1^2 f(x)dx=F(x)\Big|_1^2=7e^2-3e$.

c) $\int_0^1 \frac{e^x}{f(x)}dx=\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\ln(x+1)-\ln(x+2)\Big|_0^1=\ln\frac{4}{3}$.

VARIANTA 18

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $a_4=a_1+3r\Rightarrow a_4=11$. **2.** $4x-3\geq 2x+7\Rightarrow 2x\geq 10\Rightarrow x\geq 5\Rightarrow x\in[5,+\infty)$.

3. Condiţia de existenţă este $2x-5>0$. Rezultă că $x>\frac{5}{2}$ şi $x\in\left(\frac{5}{2},\infty\right)$. Avem că $\log_3(2x-5)=2\Leftrightarrow 2x-5=3^2\Leftrightarrow x=7$. Din verificarea condiţiilor rezultă că soluţia ecuaţiei este $x=7$. **4.** Folosind relaţiile lui Viete $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=3m$, $P=x_1x_2=\frac{c}{a}=5$. $x_1+x_2=3x_1x_2\Rightarrow 3m=15\Rightarrow m=3$. **5.** Fie $M(x,y)$ mijlocul segmentului $[AB]$. Atunci $x=\frac{x_A+x_B}{2}=3$, $y=\frac{y_A+y_B}{2}=1$. Mijlocul segmentului $[AB]$ este $M(3,1)$. **6.** $\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-120^\circ)=\sin 60^\circ$. Atunci $\sin^2 120^\circ+\cos^2 60^\circ=\sin^2 60^\circ+\cos^2 60^\circ=1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) Se verifică uşor înlocuind $x=0, y=3$ şi $z=1$ în ecuaţiile sistemului.

b) Sistemul admite soluţie unică dacă şi numai dacă determinantul matricei sistemului este nenul. Dacă A este matricea sistemului, $\det(A)=-5m+15$. Avem $\det(A)\neq 0\Leftrightarrow -5m+15\neq 0\Leftrightarrow m\neq 3\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

c) Pentru $m\neq 3$ avem că $\det(A)\neq 0$ şi se aplică regula lui Cramer.

$\Delta_x=\begin{vmatrix}-3 & -2 & 3\\ 4 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}=0\Rightarrow x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{0}{-5(m-3)}=0$; $\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & -3 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ m & 1 & 4\end{vmatrix}=-15m+45\Rightarrow$

$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-15(m-3)}{-5(m-3)}=3$; $\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & 1 & 4\\ m & -1 & 1\end{vmatrix}=-5m+15\Rightarrow z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-5(m-3)}{-5(m-3)}=1$. Soluţia este $(0,3,1)$. **2.** a) Polinomul f este diviyibil cu $X+1$ dacă şi numai dacă $f(-1)=0$. Se calculează $f(-1)=(-1)^3+3(-1)^2+3(-1)+1=0\Rightarrow (X+1)\,|\,f$.

b) Folosind teorema împărţirii cu rest se obţine câtul $q=x+6$ şi restul $r=19x-11$.

c) Folosind relaţiile lui Viete obţinem: $S=x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=-3$, $P=x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}=-1$. Atunci produsul $S\cdot P=3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$. Deoarece f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x)=2x+e^x$, obţinem că $f'(0)=1$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$ dacă $f''(x)>0$ oricare ar fi x număr real. Avem $f''(x)=(f'(x))'=2+e^x>0$, oricare ar fi x număr real, prin urmare funcţia f este convexă.

c) Înlocuind f' şi f'' de la punctele a) şi b) în ecuaţia din enunţ obţinem: $(2x+e^x)-(2+e^x)+(x^2+e^x)=e^x-3\Leftrightarrow x^2+2x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

2. a) $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (x+3)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_0^1=\frac{7}{2}$.

b) $\int_0^1 e^x f(x)dx=\int_0^1 e^x(x+3)\,dx=e^x(x+3)\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=4e-3-e^x\Big|_0^1=3e-2$.

c) $V=\pi\int_0^1 h^2(x)\,dx=\pi\int_0^1 (x+3)^2\,dx=\pi\int_0^1 (x^2+6x+9)\,dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}+3x^2+9x\right)\Big|_0^1=\frac{37}{3}\pi$.

VARIANTA 19

SUBIECTUL I

1. Şirul este progresie aritmetică cu $a_1=1$ şi $r=6$. Rezultă că $a_5=a_1+4\cdot r=1+4\cdot 6=25$. **2.** Avem că $|z|=|1-i|^{10}=\left(\sqrt{1+1}\right)^{10}=32$. **3.** Condiţiile de existenţă: $4x+2>0$ şi $x+2>0\Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$ şi $x>-2$. Rezultă că $x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)\cap\cap(-2,\infty)=\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$. Ecuaţia logaritmică se scrie succesiv sub forma: $\log_3\frac{4x+2}{x+2}==\log_3 3\Leftrightarrow\frac{4x+2}{x+2}=3$. Se obţine $x=4\in\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$. **4.** $P=\frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$ Numărul cazurilor posibile este egal cu $\text{card}(A)=6$. Cazurile favorabile sunt date de acele elemente ale mulţimii A care verifică inecuaţia $n(n-2)\le 8$. Acestea sunt: $-2,-1,3,4$. Rezultă că $P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. **5.** Fie M mijlocul $[AC]\Rightarrow M\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)\Rightarrow M(4,3)$. Ecuaţia dreptei $BM:\frac{y-y_B}{y_M-y_B}=$ $=\frac{x-x_B}{x_M-x_B}\Leftrightarrow\frac{y-2}{3-2}=\frac{x+1}{4+1}\Leftrightarrow 5(y-2)=x+1\Leftrightarrow 5y-10-x-1=0\Leftrightarrow x-5y+11=0$. **6.** Din relaţiile $\cos^2 a+\sin^2 a=1$ şi $\cos^2 b+\sin^2 b=1$ se obţine $\cos a=\frac{4}{5}$ şi $\sin b=\frac{5}{13}$. Atunci $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{63}{65}$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $A=\begin{pmatrix}2&1&-m\\1&-1&1\\3&2&-3\end{pmatrix}$. A este inversabilă $\Leftrightarrow\det(A)\neq 0.\det(A)=\begin{vmatrix}2&1&-m\\1&-1&1\\3&2&-3\end{vmatrix}=$

$=6-2m+3-3m-4+3=-5m+8,\det(A)\neq 0\Leftrightarrow -5m+8\neq 0\Leftrightarrow m\neq\frac{8}{5}\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{8}{5}\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $\det(A)=3\Rightarrow -5m+8=3\Rightarrow -5m=-5\Rightarrow m=1$. c) $\begin{cases}2x+y+2z=3\\ x-y+z=0\\ 3x+2y-3z=1\end{cases}$, $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&-1&1\\3&2&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$. Avem că $\det(A)=18\neq 0$, deci sistemul este de tip Cramer. $d_x=\begin{vmatrix}3&1&2\\0&-1&1\\1&2&-3\end{vmatrix}=6$, $d_y=\begin{vmatrix}2&3&2\\1&0&1\\3&1&-3\end{vmatrix}=18, d_z=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&-1&0\\3&2&1\end{vmatrix}=12$. Se obţine $x=\frac{1}{3}, y=1, z=\frac{2}{3}$.

2. a) Avem că: $1*2=2\cdot 1+3\cdot 2-1=7, 2*1=2\cdot 2+3\cdot 1-1=6$ şi $7\circ 6=7+6+13=16$.

b) $(x-1)*4=13\Leftrightarrow 2(x-1)+3\cdot 4-1=13\Leftrightarrow 2x=4\Leftrightarrow x=2$. c) $\begin{cases}(x*2)\circ(y*3)=1\\(2\circ x)*(3\circ y)=2\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(2x+5)\circ(2y+8)=1\\(x+5)*(y+6)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+5+2y+8+3=1\\2(x+5)+3(y+6)-1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2y=-15\\2x+3y=-25\end{cases}$ Se obţin soluţiile: $x=\frac{5}{2}$ şi $y=-10$.

SUBIECTUL AL III-LEA

1. a) $f'(x)=e^x+6x$. b) $f''(x)=e^x+6$. Avem că $f''(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Rezultă că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$. c) Ecuaţia tangentei în punctul de abscisă x_0, la graficul funcţiei f, este $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$. Pentru $x_0=0$, se obţine $f(0)=\frac{4}{3}, f'(0)=1$, iar ecuaţia tangentei este $y-\frac{4}{3}=x$ sau $y=x+\frac{4}{3}$.

2. a) $f(x)=\frac{x^2+2x}{x^3}=\frac{x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}, x\neq 0$. b) $\int_1^2 x\cdot f(x)=\int_1^2 x\frac{(x^2+2x)}{x^3}dx=$

$=\int_1^2\left(\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}\right)dx=\int_1^2 1dx+2\int_1^2\frac{1}{x}dx=(x+2\ln|x|)\Big|_1^2=2-1+2\ln 2-2\ln 1=1+2\ln 2$. c)

$g(x)=\frac{x-2}{x^2}+f(x)=^{x)}\frac{x-2}{x^2}+\frac{x^2+2x}{x^3}=\frac{2x^2}{x^3}=\frac{2}{x}$. $A=\int_2^3 g(x)dx=\int_2^3\frac{2}{x}dx=2\ln|x|\Big|_2^3=2\ln\frac{3}{2}$.

VARIANTA 20

SUBIECTUL I

1. $3-3+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$. **2.** $2x+3=\frac{3x-2+2x-5}{2}\Rightarrow x=13$. **3.** Condiţia de existenţă: $x\in[0,+\infty)$. se obţine că $2^{\sqrt{x}+1}=2^4\Rightarrow\sqrt{x}+1=4\Rightarrow\sqrt{x}=3\Rightarrow x=9\in[0,+\infty)$. **4.** $C_5^2=10$ submulţimi. **5.** $d_1\parallel d_2\Rightarrow\frac{a}{12}=\frac{1}{3}\neq\frac{2013}{2014}\Rightarrow a=4$.**6.**

$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow\sin^2 x=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}$. Deoarece $\sin x>0\Rightarrow\sin x=\frac{12}{13}$.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTUL AL II-LEA

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & m\end{pmatrix}$. a) A matrice inversabilă $\Rightarrow \det A\neq 0\Rightarrow -3m=6\neq 0\Rightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b) $-3m+6=m^2-8m+12\Rightarrow m^2-5m+6=0\Rightarrow m_1=2$ şi $m_2=3$. c) $\det A=-3\neq 0\Rightarrow$ sistemul Cramer. $\Delta_x=\begin{vmatrix}7 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ 4 & 2 & 3\end{vmatrix}=-12$, $D_y=\begin{vmatrix}1 & 7 & 1\\ 2 & 5 & -1\\ -1 & 4 & 3\end{vmatrix}=-3$, $\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 5\\ -1 & 2 & 4\end{vmatrix}=-6$,

$x=\frac{\Delta_x}{\det A}=4, y=\frac{\Delta_y}{\det A}=1, z=\frac{\Delta_z}{\det A}=2$. **2.** a) $f(-3)=0\Rightarrow m-15=0\Rightarrow m=15$. b) Se obţine că $f(2)=0$. c) Coeficienţii fiind raţionali polinomul are şi rădăcina $x_2=\frac{-3-\sqrt{13}}{4}$.

Din relaţia lui Viete: $x_1+x_2+x_3=-1$ se obţine că $x_3=\frac{1}{2}$. Condiţia $f\left(\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow m=\frac{1}{8}$.

SUBIECTUL AL III-LEA

1. Avem că $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(1-1)}=1, n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1$. Ecuaţia asimptotei oblice este $y=x+1$. b) $f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}, x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Din $f'(x)=0\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow$ $\Rightarrow x_1=0, x_2=2$. Formăm tabelul de semne:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+++++++$		0	$--$	$\|$	$--$	0	$+++++++$	
$f(x)$	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$		M	$\searrow\searrow$	$\|$	$\searrow\searrow$	m	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$	

Rezultă că f este crescătoare pe intervalele $(-\infty,0)$ şi $(2,+\infty)$ şi descrescătoare pe $(0,1)$ şi $(1,2)$. c) $y-f(3)=f'(3)(x-3)\Rightarrow y-\frac{9}{2}=\frac{3}{4}(x-3)\Rightarrow 3x-4y+9=0$.

2. a) $F'(x)=e^x+(x+2013)e^x=(x+2014)e^x=f(x)\Rightarrow F$ o primitivă a lui f.

b) $V=\pi\int_0^1 k^2(x)dx=\pi\int_0^1\left(\sqrt{e^x}\right)^2dx=\pi e^x\Big|_0^1=\pi(e-1)$.

c) $\int_0^1 e^x\cdot x dx=\left(xe^x\right)\Big|_1^2-\int_1^2 e^x dx=\left(xe^x\right)\Big|_2^1-e^x\Big|_2^1=e^2$.

VARIANTA 21

SUBIECTUL I

1. Se are în vedere că $f\left(\frac{3}{2}\right)=\arccos 1=0$. **2.** Inecuaţia se scrie succesiv astfel:

$2x_1^2-5x_1x_2+2x_2^2\le 0\Leftrightarrow\Leftrightarrow 2\left(x_1^2+x_2^2\right)-5x_1x_2\le 0\Leftrightarrow 2\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]-5x_1x_2\le 0$. Din relaţiile lui Viete avem că $x_1+x_2=2m$ şi $x_1\cdot x_2=1$. Inecuaţia devine:

Scanned with OKEN Scanner

$2\left[\left(2m^2\right)-2\right]-5\le 0 \Leftrightarrow 8m^2-9\le 0$; $8m^2-9=0 \Rightarrow m_1=-\frac{3\sqrt{2}}{4}, m_2=\frac{3\sqrt{2}}{4}$. Soluţia inecuaţiei date este $m\in\left[-\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{.4}\right]\cap\mathbb{Z}$, adică $m\in\{-1,0,1\}$.

3. $\lg\frac{1}{2}-\lg\frac{3}{2}-\lg\frac{5}{2}+\lg\frac{3}{4}=\lg\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}=\lg\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{15}=\lg\frac{1}{10}=-1$. **4.** Coordonatele mijlocului M al segmentului $[BC]$ sunt $x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=1, y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=-2$. Rezultă că $AM=\sqrt{(1-1)^2+(4+2)^2}=6$. **5.** $C_5^0+C_5^1+C_5^5=1+5+1=7$. **6.** $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. Înocuind $\cos x=-\frac{11}{12}$ se obţine $\sin^2 x+\frac{121}{144}=1\Rightarrow\sin^2 x=\frac{23}{144}$ şi $\sin x=\frac{\sqrt{23}}{12}$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $\det(A)=-4a+a^2$. b) A este inversabilă $\Leftrightarrow\det(A)\neq 0, \det(A)=0\Leftrightarrow a^2-4a=0$. Se obţine $a_1=0, a_2=4$. Aşadar, A este inversabilă pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,4\}$. c) Pentru $a=1, A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}, \det(A)=-4+1=-3\neq 0, {}^tA=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ şi $A^*=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Rezultă că $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}A^*=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. **2.** a) $x_1+x_2+x_3=-2a$. Se obţine ecuaţia $-2a=-2$ cu soluţia $a=1$. b) $(x+1)\mid f\Leftrightarrow f(-1)=0\Leftrightarrow -1+2a-a+2-3=0$. Se obţine $a=2$. c) $a=1\Rightarrow f=X^3+2X^2-X+3. S=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=(-2)^2-2(-1)=6$.

SUBIECTUL AL III-LEA

1.a) $f'(x)=\frac{x'(x-1)-x(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. b) Asimptota verticală: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\frac{1}{-0}=-\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\frac{1}{+0}=+\infty$. Rezultă că dreapta $x=1$ este asimptotă verticală.

b) Asimptotă orizontală: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$. Rezultă că $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ şi spre $-\infty$. c) $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}<0, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\Rightarrow$ că funcţia f este strict descrescătoare pe intervalele $(-\infty,1)$ şi $(1,+\infty)$.

2. a) $\int f(x)dx=\int\left(x^{2014}+2014^x\right)dx=\frac{x^{2015}}{2015}+\frac{2014^x}{\ln 2014}+C$. b) $\int_0^1 xf\left(x^2\right)dx=$

$$=\int_0^1 x\left[\left(x^2\right)^{2014}+(2014)^{x^2}\right]dx=\int_0^1 x^{4029}dx+\int_0^1 x2014^{x^2}dx=\frac{x^{4030}}{4030}\Big|_0^1+\frac{1}{2}\frac{2014^{x^2}}{\ln 2014}\Big|_0^1=\frac{1}{4030}+$$

Scanned with OKEN Scanner

$+\frac{1}{2}\left(\frac{2014}{\ln 2014}-\frac{1}{\ln 2014}\right)$. b) Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției f. Rezultă că $F'(x)=f(x)=x^{2014}+2014^x>0,\forall x\in[0,\infty)\Rightarrow F$ este strict crescătoare pe $[0,+\infty)$.

VARIANTA 22

SUBIECTUL I

1. $2\left(2-7\sqrt{3}\right)+14\sqrt{3}=4-14\sqrt{3}+14\sqrt{3}=4\in\mathbb{N}$. **2.** $A_4^2=\frac{4!}{2!}=3\cdot 4=12, C_5^3=\frac{5!}{2!3!}=10$. Rezultă că $m=12+10+6=28$. **3.** Condiția de existență $x^2-5x+7\geq 0$ implică $x\in\mathbb{R}$. Prin ridicarea la pătrat ecuația se scrie $x^2-5x+7=1$ sau $x^2-5x+6=0$ cu soluțiile $x\in\{2,3\}$. **4.** Dobânda anuală obținută este $\frac{6}{100}\cdot 2000$ lei $=120$(lei). Suma finală obținută după doi ani, în regim de dobândă simplă, este $S=(2000+2\cdot 120)$ lei $=2240$ lei. **5.** Mijlocul laturii $[AB]$ este punctul $D\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$, adică $D(2,3)$. Ecuația dreptei CD este $\frac{y-y_D}{y_c-y_D}=\frac{x-x_D}{x_C-x_D}$. Se obține ecuația $x-y+1=0$. **6.** Din relația $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ rezultă că $\sin^2 x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{1-\frac{4}{25}}=\frac{\sqrt{21}}{5}$

SUBIECTUL al II-lea

1. a) $A+B=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ -4 & 3\end{pmatrix}$ și $\det(A+B)=-9+12=3$. b) $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}=-5\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=-5I_2$. Rezultă că $A^2+5I_2=O_2$. c) Avem că $X=B\cdot A^{-1}$. Din egalitatea $A^2=-5I_2$ se obține că $A^{-1}=-\frac{1}{5}A$. Astfel rezultă că $X=-\frac{1}{5}B\cdot A=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -5 & 0\end{pmatrix}=$ $=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 0\end{pmatrix}$. **2.** a) $h=f\cdot g=X^4-2X^3-5X^2+16X-12$. b) Folosind scheme lui Horner se obține câtul $q=X^2+2X-1$ și restul $r=4$. c) Din relațiile lui Viete $x_1+x_2+x_3=0$ și $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-5$ se obține că: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=10$.

SUBIECTUL al III-lea

1. a) $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{(\sin^2 x)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x-1}=-1$. b) Avem că $f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=$ $=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}>0,\forall x\in(2,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $(2,+\infty)$. c) $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1$ și $n=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=1$. Ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ este $y=x+1$.

2. a) Funcția f este continuă pe $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Deoarece $l_s=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(3x^2+1)=4$,

Scanned with OKEN Scanner

$l_d=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x+3)=4$ şi $f(1)=4$, funcţia f este continuă şi în $x=1$. Aşadar f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci are primitive. b) $\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx=\int_0^1(3x^2+1)\,dx+$

$+\int_1^2(x+3)dx=\left(x^3+x\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_1^2=\frac{13}{2}$. c) $V=\pi\int_1^3 f^2(x)\,dx=\pi\int_1^3(x+3)^2\,dx=$

$=\pi\int_1^3\left(x^2+6x+9\right)dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}+3x^2+9x\right)\Big|_1^3=\frac{98}{3}\pi$.

VARIANTA 23

SUBIECTUL I

1. $\frac{3}{2}(3-1)=\frac{3}{2}\cdot 2=3\in\mathbb{N}$. **2.** $x_V=-\frac{b}{2a}\Rightarrow x_V=\frac{-(-4)}{2}=\frac{4}{2}=2$. $y_V=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-(-8)}{4}=$

$=\frac{8}{4}=2\Rightarrow x_V=y_V$. **3.** $a_9=a_4+5r\Rightarrow 11=1+5r\Rightarrow -5r=-10\Rightarrow r=2$ şi

$a_5=a_4+r\Rightarrow a_5=1+2\Rightarrow a_5=3$. **4.** $d=6\%\cdot 1200=\frac{6}{100}\cdot 1200=72lei$. Rezultă că

$S=1200+72=1272lei$ **5.** Fie B – mijlocul segmentului $[AC]\Rightarrow y_B=\frac{y_A+y_C}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow 4=\frac{3+2m+3}{2}\Rightarrow 8=2m+6\Rightarrow m=1$. **6.** $A_{(ABC)}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin\left(\widehat{C}\right)=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=4$

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $D(2)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&9\\1&2&4\end{vmatrix}=12+2+9-3-18-4=-2$. b) $D(x)=3x^2+x+9-3-9x-x^2=$

$=2x^2-8x+6$. Din $D(x)=0\Rightarrow 2x^2-8x+6=0\Rightarrow 2(x^2-4x+3)=0\Rightarrow x^2-4x+3=0$, cu soluţiile $x_1=1;x_2=3$. c) Se obţine ecuaţia $\left(2^x-1\right)\left(2^x-3\right)=0$. Din $2^x=1\Rightarrow x=0$ şi $2^x=3\Rightarrow x=\log_2 3$. Ecuaţia are două soluţii reale distincte. **2.** a) Din teorema restului rezultă $f(2)=3$. Avem că $f(2)=8-4a-2a+1=9-6a$. Din egalitatea $9-6a=3\Rightarrow -6a=-6\Rightarrow a=1$. b) Din relaţiile lui Viete avem $x_1+x_2+x_3=a$ şi $x_1\cdot x_2\cdot x_3=-1\Rightarrow a=3\cdot(-1)\Rightarrow a=-3$. c) f are rădăcina $-1\Rightarrow f=(x+1)\left[x^2-(1+a)x+1\right]$. Polinomul f are toate rădăcinile reale dacă $x^2-(1+a)x+1=0$ are soluţii reale $\Rightarrow\Delta\geq 0\Rightarrow a^2+2a-3\geq 0\Rightarrow a\in(-\infty,-3]\cup[1,\infty)$.

SUBIECTUL AL III-LEA

1.a) $f'(x)=\frac{2x(x-1)-\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}, x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. b) Ecuaţia tangentei este: $y-f(2)=f'(2)(x-2)$. Avem că $f(2)=5$ şi $f'(2)=-1\Rightarrow y-5=-1(x-2)$. Ecuaţia

Scanned with OKEN Scanner

tangentei este: $x+y-7=0$. c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Rightarrow f$ nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$.

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-x}=1, n=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-x=1 \Rightarrow y=x+1$ asimptotă oblică spre $+\infty$.

2. a) $f_0(x)=-4x^3+6x+2$. Se obține că $\int f_0(x)\,dx=\int(-4x^3+6x+2)dx=-x^4+3x^2+2x+C$.

b) $f_2(x)=2x^2+6x+2$. Rezultă că $\int\limits_1^3\dfrac{2x^2+6x+2}{x}dx=\int\limits_1^3\left(2x+6+\dfrac{2}{x}\right)dx=x^2+6x+2\ln x\Big|_1^3=$

$=20+2\ln 3$. c) Deoarece, $m\geq 2, f(x)\geq 0$ pentru orice $x\in[0,1]\Rightarrow A=\int\limits_0^1 f_m(x)\,dx$

$=(2m-4)\cdot\dfrac{x^4}{4}+m\cdot\dfrac{x^3}{3}+3x^2+2x\Big|_0^1=\dfrac{2m-4}{4}+\dfrac{m}{3}+5\Rightarrow\dfrac{2m-4}{4}+\dfrac{m}{3}+5=9\Rightarrow m=6$.

VARIANTA 24

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Se obține că $f(x+1)=2x+4, f(1)=4, g(2x)=2-2x$ și $g(0)=2$ și se înlocuiește în ecuația dată. **2.** Din $a_{29}=a_1+28r$, avem $r=-2$, apoi $a_{12}=a_1+11r=2-22=-20$.

3. Din $2^x\cdot 2+2^x\cdot 4=24\Rightarrow 2^x(2+4)=24\Rightarrow x=2$. **4.** $\log_5\dfrac{1}{25}=-2$.

5. Ridicând la pătrat și aplicând formula $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ obținem identitatea cerută.

6. M mijlocul segmentului. Atunci $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=6$ și $y_M=2$. Se obține $A(6,2)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. b) $2x+2-x^2=2+x^2\Rightarrow x=0$ și $x=1$. c) Se verifică prin calcul direct. **2.** a) 80. b) $e=6$. c) $2^x\cdot 2^{x+1}-5\cdot 2^x-5\cdot 2^{x+1}+30=2^{2x+1}; x=1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) Se aplică formula de derivare a câtului a două funcții.

b) $m=1, n=0$; ecuația asimptotei este $x=y$.

c) Are două puncte de extreme pentru că $f'(x)=0$ are două rădăcini reale $x=-4$ și $x=4$, deci $E_1(-4,-8)$ și $E_2(4,8)$. **2.** a) $\int(9x-x^3)dx=\dfrac{9x^2}{2}-\dfrac{x^4}{4}+c$.

b) $A=\int\limits_{-3}^{3}(9-x^2)dx=9x\Big|_{-3}^{3}-\dfrac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{3}=(27+27)-(9+9)=36$.

c) $V=\pi\int\limits_{-3}^{3}(81-18x^2+x^4)dx=\pi\left(162+\dfrac{486}{5}\right)$.

VARIANTA 25

SUBIECTUL I

1. Intersecția cu axa Ox: $f(x)=0\Leftrightarrow(m+1)x^2+2x-3=0$. Această ecuație trebuie să aibă două soluții (acestea sunt punctele de la intersecția graficului funcției cu axa Ox). Se pune condiția $\Delta>0$, rezultă că $\Delta=4+12(m+1)>0\Leftrightarrow 12(m+1)>-4\Leftrightarrow 3m>-4\Leftrightarrow m\in\left(-\dfrac{4}{3};+\infty\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Condiție de existență $2x-3\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow x\in\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$. $4=2^2;64=2^6$. Ecuația devine $2^{2\sqrt{2x-3}}=2^6\Leftrightarrow\sqrt{2x-3}=3$. Se ridică la pătrat și avem: $\left(\sqrt{2x-3}\right)^2=3^2\Leftrightarrow 2x-3=9\Leftrightarrow x=6$.

3. $S=1+13+25+...+121$. Observăm că este verificată proprietatea progresiei aritmetice, cu rația $r=12$. Suma unei progresii aritmetice este $S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$. Avem $a_n=a_1+(n-1)\cdot 12\Leftrightarrow n=11$ și astfel $S_{11}=\frac{(1+121)\cdot 11}{2}=671$. **4.** Elementele din mulțimea dată divizibile cu 5 sunt $\{0,5,10,15,20,25...50\}$ adică 11 elemente.

$P=\frac{\text{nr. de cazuri favorabile}}{\text{nr. de cazuri posibile}}=\frac{11}{51}$ **5.** Doi vectori sunt ortogonali dacă produsul lor scalar este nul. Avem că $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\left[(2m+1)\vec{i}-3\vec{j}\right]\left(m\vec{i}+\vec{j}\right)=0\Rightarrow(2m+1)\cdot m+(-3)\cdot(1)=0\Leftrightarrow 2m^2+m-3=0$ cu soluțiile $m\in\left\{1,-\frac{3}{2}\right\}$. Condiția $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=1$. **6.** Din egalitatea $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ rezultă succesiv: $\left(\frac{4}{5}\right)^2+\cos^2 x=1\Leftrightarrow\cos^2 x=^{25)}1-\frac{16}{25}\Leftrightarrow\cos^2 x=\frac{9}{25}\Rightarrow\cos x=\pm\frac{3}{5}$ și $x\in(90°;180°)\Rightarrow\cos x=-\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $M_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix};M_1=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}.M_0+M_1=\begin{pmatrix}2&0\\1&-2\end{pmatrix}.\det(M_0+M_1)=\begin{vmatrix}2&0\\1&-2\end{vmatrix}=-4$.

b) $M_x^{\,2}=\begin{pmatrix}1&0\\x&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\x&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$.

c) $\det(M_x)=\begin{vmatrix}1&0\\x&-1\end{vmatrix}=-1.{}^tM_x=\begin{pmatrix}1&x\\0&-1\end{pmatrix};\ \det({}^tM_x)=\begin{vmatrix}1&x\\0&-1\end{vmatrix}=-1$. Rezultă că $x^2\cdot(-1)-4\cdot(-1)=0\Leftrightarrow -x^2+4=0\Rightarrow x=\pm 2$.

2. a) Avem $3(x-2)(y-2)+2=3(xy-2y-2x+4)+2=3xy-6y-6x+12+2=$
$=3xy-6y-6x+14=x\circ y,x,y\in\mathbb{R}$.

b) $x\circ x==3(x-2)(x-2)+2=S\Rightarrow 3(x-2)(x-2)+2=5\Leftrightarrow 3(x-2)^2=3\Leftrightarrow(x-2)^2=1$ cu soluțiile $x\in\{1;3\}$. c) Observăm că $x\circ 2=3(x-2)(2-2)+2=2$ și $2\circ y=3(2-2)(y-2)+2=2$. Atunci

$$\underbrace{(-2013)\circ(-2012)\circ...\circ 0\circ 1}_{x}\circ 2\circ\underbrace{3\circ...\circ(2013)}_{y}=(x\circ 2)\circ y=2\circ y=2.$$

SUBIECTUL AL III-LEA

a) $f'(x)=\left(2e^x-x^2+2x+1\right)'=2\left(e^x\right)'-\left(x^2\right)'+(2x)'+1'=2e^x-2x+2=2\left(e^x-x+1\right),x\in\mathbb{R}$.

b) f este convexă pe $(0,+\infty)\Leftrightarrow f''(x)>0,\forall x\in(0,+\infty)$. Avem că $f''(x)=\left[f'(x)\right]'=$

Scanned with OKEN Scanner

$=\left[2\left(e^x-x+1\right)\right]'=2\left(e^x-1\right)\geq 0, \forall x\in(0,+\infty)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)-2e^x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\left(e^x-x+1\right)-2e^x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x-2x+2-2e^x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x+2}{x^2+1}=0.$

2. a) F primitivă pentru f dacă F este derivabilă şi $F'(x)=f(x), \forall x\in(0,+\infty)$. Avem că F este derivabilă (este funcţie elementară iar domeniu de definiţie este interval).

$F'(x)=\left(x\ln x-2\sqrt{x}\right)'=(x\ln x)'-2\left(\sqrt{x}\right)'=x'\ln x+x(\ln x)'-2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\ln x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1=f(x).$

b) $\int_1^e\left(x\ln x-2\sqrt{x}+2\sqrt{x}\right)dx=\int_1^e x\ln x\,dx=\int_1^e\left(\dfrac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\cdot\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\dfrac{x^2}{2}\cdot(\ln x)'dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-$

$-\int_1^e\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\dfrac{1}{2}\int_1^e x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2}{2}\Big|_1^e=\dfrac{x^2}{2}\left(\ln x-\dfrac{1}{2}\right)\Big|_1^e=\dfrac{e^2}{2}\left(\ln e-\dfrac{1}{2}\right)-$

$-\dfrac{1^2}{2}\left(\underbrace{\ln 1}_{0}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{e^2+1}{4}$. c) $A=\int_1^4|f(x)|dx=\int_1^4\left(\ln x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1\right)dx=\int_1^4\ln x\,dx-\int_1^4\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_1^4 dx=$

$=\int_1^4 x'\ln x\,dx-\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}dx+x\Big|_1^4=x\ln x\Big|_1^4-\int_1^4 x(\ln x)'dx-\dfrac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Big|_1^4+x\Big|_1^4=2(2\ln 4-1).$

VARIANTA 26

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $\log_5 10+\log_5 3-\log_5 6=\log_5 5=1$. **2.** $x_1+x_2=2,\ x_1\cdot x_2=-4\Rightarrow 2(x_1+x_2)-x_1x_2=8$.

3. Condiţia: $2x-3\geq 0\Rightarrow x\in\left[\dfrac{3}{2},\infty\right)$. Prin ridicarea la pătrat a ecuaţiei se obţine:

$2x-3=25\Rightarrow x=14\in\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$. **4.** $x-\dfrac{15}{100}x=170\Rightarrow x=200lei$.

5. Din faptul că vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari $\Rightarrow\dfrac{3}{5}=\dfrac{a+3}{2a+1}$, de unde rezultă că $a=12$.

6. Avem că $R=\dfrac{AB}{2\sin C}=\dfrac{10\sqrt{2}}{2\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=10$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) Înlocuind $x=3,\ y=-1,\ z=-1\Rightarrow m=4$. b) Sistemul are soluţie unică dacă $\det(A)\neq 0\Rightarrow m\neq 1$, deci $m\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. c) Dacă $m=4\Rightarrow x=3,\ y=-1,\ z=-1$.

2. a) Se arată prin calcul direct.

b) Conform punctului a) $\Rightarrow(x-1)^2+1=5\Rightarrow(x-1)^2=4\Rightarrow x-1=\pm 2\Rightarrow x=3,\ x=-1$.

c) $x*e=e*x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Din

$x*e=x\Rightarrow(x-1)(e-1)+1=x\Rightarrow(x-1)(e-1)=x-1\Rightarrow e-1=1$, adică $e=2\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scanned with OKEN Scanner

1. a) $f'(x)=\left(\frac{x+2}{x^2}\right)'=\frac{(x+2)'x^2-(x+2)(x^2)'}{x^4}=\frac{-x-4}{x^3}, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+2)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$. Ecuația asimptotei orizontale este $y=0$.

c) Tabelul de variație a funcției f este:

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$ /	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$
$f(x)$	$\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow$	$\frac{-1}{8}$	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$ /	$\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow$

Se obține că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,-4)$ și pe $(0,\infty)$ și este crescătoare pe $(-4,0)$.

2. a) Funcția f este continuă pe intervalul $(-\infty,0)$, respectiv $(0,\infty)$ fiind o compunere de funcții elementare. Din faptul că $l_s(0)=l_d(0)=f(0)\Rightarrow f$ este continuă în punctul $x_0=0$. Deci f este continuă pe $\mathbb{R}$. Rezultă că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) $\int\limits_{-1}^{0}x\left(e^x+1\right)dx=\int\limits_{-1}^{0}xe^xdx+\int\limits_{-1}^{0}xdx=xe^x\Big|_{-1}^{0}-e^x\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}=\frac{4-3e}{2e}$.

c) $V=\pi\int\limits_{1}^{4}\left(\sqrt{x}+2\right)^2dx=\pi\int\limits_{1}^{4}\left(x+4\sqrt{x}+4\right)dx=\frac{229\pi}{6}$.

VARIANTA 27

SUBIECTUL I

1. $a=10-2=8$. **2.** $a=7\in\mathbb{N}$. **3.** Rezolvând ecuația $\frac{\left(x^2+1\right)+\left(4x^2-1\right)}{2}=4x+2$, se obțin soluțiile $x_1=2$ și $x_2=-\frac{2}{5}$. **4.** Aplicând proprietățile puterilor se obține ecuația $\frac{2^{n^2}}{2^{n(n+1)}}=2^{-2}$, de unde rezultă $n=2$. **5.** $5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}(34;8)$.

6. Aplicând relația $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$, se obține $\cos x=-\frac{17}{32}$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) Se pune condiția ca $\det(A)\neq 0$, unde A este matricea sistemului. Se obține $m\in\mathbb{R}\setminus\{-7\}$. b) Se verifică prin înlocuire directă. c) $\Delta=-30\neq 0$, deci sistemul este de tip Cramer. Soluția este $(-1;4;0)$. **2.** a) 25. b) Se rezolvă ecuațiile $x\circ a=a\circ x=x$ și se obține $a=e$. c) prin calcul direct și logaritmare.

SUBIECTUL AL III-LEA

1. a) Se derivează și se împarte în două fracții. b) Se calculează $f\left(\sqrt{e-1}\right)=\frac{1}{\sqrt{e-1}}$ și

Scanned with OKEN Scanner

$f'\left(\sqrt{e-1}\right)=\frac{e-2}{e(e-1)}$. Ecuaţia tangentei este $\frac{e-2}{e(e-1)}x-y+\frac{2}{e\sqrt{e-1}}=0$. c) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, deci ecuaţia asimptotei orizontale este $y=0$. **2.** a) Se demonstrează prin derivarea funcţiei F. b) Realizând tabelul de semn pentru $F'(x)=f(x)$ se arată că $F'(x)>0$, $(\forall)x\in\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)$. c) $\int_0^3 f(x)dx=F(3)-F(0)=6$.

VARIANTA 28

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $\log_2\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)}{7}=\log_2\frac{9-2}{7}=\log_2 1=0$. **2.** $C_3^0=1, C_4^2=6, C_4^4=1$ şi avem că $S=8$. **3.** $x^2-4x-1=0, a=1, b=-4, c=1$. Se obţine că $S=x_1+x_2=4$, $P=x_1\cdot x_2=-1$ şi $x_1^2+x_2^2=S^2-2P=18$.

4. Din teorema sinusurilor se obţine $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\sin A=\frac{a\cdot\sin B}{b}=1$. Triunghiul ABC este dreptunghic isoscel şi are aria $A_{(ABC)}=\frac{c_1\cdot c_2}{2}=2$. **5.** $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ şi se obţine $AB=5$. **6.** $S=x+y, P=xy$. Se obţine sistemul $\begin{cases}S+P=9\\S-P=1\end{cases}$ cu $S=5, P=4$. Rezultă ecuaţia $t^2-5t+4=0$ cu soluţiile $t_1,t_2\in\{1,4\}$. Soluţiile sistemului sunt: $(1,4),(4,1)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a) $C=A+B=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(C)=8$ .c) $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$, deoarece $AB=BA$. Rezultă că $A^3=A^2\cdot A=2A\cdot A=2\cdot A^2=4\cdot A=2^2\cdot A$, $B^3=B^2\cdot B=4B\cdot B=4B^2=16\cdot B=4^2\cdot B$ şi $A^2B=O_2=BA^2$. Înlocuind, se obţine relaţia din enunţ.

2. a) $x\circ y=xy-7x-7y+56=x(y-7)-7y+49+7=x(y-7)-7(y-7)+7=$ $=(x-y)(y-7)+7, \forall x,y\in\mathbb{R}$. b) Din $x,y\in G\Rightarrow$ $x>7$ şi $y>7$ şi $x-7>0, y-7>0\Rightarrow(x-7)(y-7)>0\Rightarrow(x-7)(y-7)+7>7\Rightarrow$ $x\circ y\in(7,+\infty)=G$.

c) Dacă e este elementul neutru, atunci pentru $\forall x\in\mathbb{R}$ avem $x\circ e=e\circ x=x\Leftrightarrow(x-e)(e-x)+7=(e-7)(x-7)+7=x$. Se obţine că $e=8\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x)=\frac{4x}{\left(x^2+2\right)^2}, x\in\mathbb{R}$. b) Funcţia este descrescătoare pe $(-\infty,0)$ şi crescătoare pe $(0,+\infty)$. Din $\sqrt[3]{2013}<\sqrt[3]{2014}$ şi f crescătoare pe $(0,+\infty)\Rightarrow f\left(\sqrt[3]{2013}\right)<f\left(\sqrt[3]{2014}\right)$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1\Rightarrow y=1$, ecuaţia asimptotei orizontale $+\infty$.**2.** a) $f(x)-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=0$.

b) Formula ariei: $A=\int_0^3|f(x)dx$. Rezultă $A=\int_0^3\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)dx=\ln 10$.

Scanned with OKEN Scanner

c) $g(x)=\frac{1}{x+1}$. Formula volumului $V=\pi\int_1^2\frac{1}{(x+1)^2}dx$. Se obține că $V=\frac{\pi}{6}$.

VARIANTA 29

SUBIECTUL I

1. $2\left(\sqrt{12}i+3\right)-4\sqrt{3}i=4\sqrt{3}i+6-4\sqrt{3}i=6$. **2.** $f(5)\cdot f\left(\sqrt{6}\right)=0$.

3. $3^{x^2-4}=\frac{1}{27}\Leftrightarrow 3^{x^2-4}==3^{-3}\Leftrightarrow x^2-4=-3\Leftrightarrow x\in\{-1,1\}$. **4.** $\frac{20}{100}\cdot 250=50$ *lei* reprezintă scumpirea. Deci 300 *lei* este noul preț. **5.** $x_p=\frac{x_M+x_N}{2}\Rightarrow 2m+1=5\Leftrightarrow m=2$, $y_P=\frac{y_M+y_M}{2}\Leftrightarrow 4=4$. **6.** $\cos A=\pm\sqrt{1-(\sin A)^2}\Rightarrow\cos A=\pm\frac{3}{5}$. Cum $m\left(\widehat{A}\right)\in(90^0,180^0)$, se obține $\cos A=-\frac{3}{5}$ și $\text{tg}A=-\frac{4}{3}$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $\det A=-6+20=14$. b) Pentru $m=5$ obținem $B=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 4 & 3\end{pmatrix}$. Astfel $A\cdot B=\begin{pmatrix}16 & 5\\ -4 & 11\end{pmatrix}$.

c) $A+B=O_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5-m & 0\\ m-5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow m=5$. **2.** a) $(-2)\circ 1=-2-4+2+2=-2$. b) $5\circ x=-2\Rightarrow 7x+12=-2\Leftrightarrow x=-2$. c) Se obține sistemul de ecuații $\begin{cases}3x+4=y\\ y=7x\end{cases}$ cu soluțiile $x=1,y=7$.

SUBIECTUL AL III-LEA

a) $f'(x)=3x^2-6x+m,x\in\mathbb{R}$. Din $f'(1)=0\Rightarrow m=3$. b) $l=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^2+mx+2}{5x^2}=-\frac{3}{5}$.

c) $m=3\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+3x+2\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$, deci f este crescătoare pe $\mathbb{R}$. **2.** $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},f(x)=x+\frac{1}{x^2}$ a) $\int_2^4\left[f(x)-\frac{1}{x^2}\right]dx=\int_2^4 xdx=6$.

b) $F'(x)=x+\frac{1}{x^2}=f(x),\forall x\in(0,+\infty)$. F este derivabilă pe $(0,+\infty)$. Deci, F este o primitivă a funcției f. c) $A=\int_1^3 f(x)\,dx=\frac{14}{3}$.

VARIANTA 30

SUBIECTUL I

1. Rădăcinile ecuației atașate sunt $x_1=-1$ și $x_2=\frac{7}{2}$. Soluția inecuației este $x\in\mathbb{Z}\cap\left(-1,\frac{7}{2}\right)$ $\Rightarrow x\in\{0,1,2,3\}$. **2.** Din condițiile de existență rezultă că $x>\frac{1}{2}$. Avem $\log_3\frac{4x-1}{x(2x-1)}=1\Rightarrow\frac{4x-1}{2x^2-x}=3\Rightarrow x_1=1,x_2=\frac{1}{6}$. Soluția ecuației este $x=1\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

3. Fie x preţul primului produs. Preţul celui de al doilea produs este $x+\frac{10}{100}x=\frac{11}{10}x$. Avem că $x+\frac{11x}{10}=252$ şi se obţine că $x=120\,lei$ şi $y=132\,lei$. **4.** Avem 8 numere din care divizibile cu 4 sunt 144 şi 444. Deci $P=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$. **5.** Din $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow -2(a-2)-3(1+a)=0\Rightarrow a=\frac{1}{5}$.

6. $A_{(ABC)}=\frac{AB\cdot BC\cdot\sin\left(\widehat{ABC}\right)}{2}=\frac{3\cdot 8\cdot\frac{1}{2}}{2}=6\left(cm^2\right)$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $A(2)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&-1&2\\0&1&4\end{pmatrix}, A(-1)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&2&2\\0&1&4\end{pmatrix}, A(2)A(-1)=\begin{pmatrix}1&-1&-5\\0&0&8\\-2&6&18\end{pmatrix}$.

b) $\det\left(A(x)\right)=4-4x+2-2=0\Rightarrow x=1$. c) $A(0)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&1&2\\0&1&4\end{pmatrix}, \det\left(A(0)\right)=4,$

$A^*(0)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\8&4&0\\-2&-1&1\end{pmatrix}$. Deci $A^{-1}(0)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-1&1\\8&4&0\\-2&-1&1\end{pmatrix}$. **2.** a) $f(1)=0\Rightarrow 1-5+a-2=0\Rightarrow$

$\Rightarrow a=2$. b) $f=X^2-5X+4$ are rădăcinile $x_1=1$ şi $x_2=4$, $g(1)=1+2-3+0\Rightarrow x_1=1$ este rădăcină şi pentru g, $g(4)=256+2\cdot 64-3\neq 0\Rightarrow f$ nu divide g. c) $h=3g+10xf=$

$=3x^4+16x^3-50x^2+10(a-2)x-9$. Se impun condiţiile: $h(1)=h'(1)=0$. Se obţine $a=6$ care verifică.

SUBIECTUL AL III-LEA

a) $f'(x)=x'\ln x+x(\ln x)'-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\ln x+1-\frac{1}{2\sqrt{x}}$. b) Ecuaţia tangentei:

$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. Avem că $f'(1)=\ln 1+1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Ecuaţia se scrie $y-(-1)=$

$=\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow 2y+2=x-1\Rightarrow x-2y-3=0$. c) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}-\sqrt{x}\right)=0\Rightarrow x=0$ nu

este asimptotă verticală. **2.** a) $I_0=\int_0^1(1+1)e^x dx=2e^x\Big|_0^1=2(e-1)$. b) Folosim metoda

integrării prin părţi $I_2-I_1=\int_0^1\left(x^2+1-x-1\right)e^x dx=\int_0^1\left(x^2-x\right)e^x dx=\left(x^2-x\right)e^x\Big|_0^1-\int(2x-1)e^x dx=$

$=-\left[(2x-1)e^x\Big|_0^1-\int_0^1 2e^x dx\right]=-\left[e+1-2(e-1)\right]=-e-1+2e-2=e-3$.

Scanned with OKEN Scanner

c) $I_{n+1}-I_n=\int_0^1\left(x^{n+1}-x^n\right)e^x, 0\le x\le 1\Rightarrow x^{n+1}\le x^n\Rightarrow x^{n+1}-x^n\le 0\Rightarrow I_{n+1}-I_n\le 0, \forall n\in\mathbb{N}$.

VARIANTA 31

SUBIECTUL I

1. 19. **2.** 145. **3.** $a=-5, b=-3$. **4.** $P=\frac{4}{5}$. **5.** $(-1,4)$. **6.** $S=16$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$. b) $\det\left(A^2-B^2\right)=-192$. c) Se calculează inversa matricei A şi se arată că este egală cu opusa matricei B. **2.** a) $x\circ y=2xy+4x+4y+6=$.

$=2xy+4x+4y+8-2=2x(y+2)+4(y+2)-2=(y+1)(2x+4)-2=2(x+2)(y+2)-2$.

b) $e=-\frac{3}{2}$. c) Soluţia reală a ecuaţiei este $x=-1$.

SUBIECTUL AL III-LEA 1. a) $f'(x)=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}, x\in\mathbb{R}$. b) Funcţia f este descrescătoare pe $(-\infty,0)$ şi crescătoare pe $(0,+\infty)$. c) Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f este: $8x-25y-1=0$. **2.** a) $\frac{7}{3}$. b) $8-3e$. c) $\frac{197}{6}\pi$.

VARIANTA 32

SUBIECTUL I

1. $\left.\begin{matrix}b_1=2\\ b_2=6\end{matrix}\right\}\Rightarrow q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{6}{2}=3$. $b_4=b_1\cdot q^3\Rightarrow b_4=2\cdot 3^3=2\cdot 27=54$. **2.** Din relaţiile lui Viete $\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a}\\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=-2m\\ x_1\cdot x_2=6m-8\end{cases}$. Dacă $x_1+x_2=x_1x_2$ atunci $-2m=6m-8\Leftrightarrow m=1$.

3. Egalitatea $f(x)=x+1$ conduce la ecuaţia $2x^2+(m-1)x+2=0$. Din condiţia $\Delta=0\Rightarrow$ $\Rightarrow m\in\{5,-3\}$. **4.** $5^x=\frac{1}{625}\Leftrightarrow 5^x=5^{-4}\Leftrightarrow x=-4$. **5.** Fie x preţul iniţial al produsului. Avem $x+\frac{15}{100}x=414\Leftrightarrow x=360\ lei$. **6.** $A(5,3)\in d\Leftrightarrow 5+3\cdot 3-m=0\Leftrightarrow m=14$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -6 & 4\end{pmatrix}=-A$. b) $M(t)\cdot M(v)=(tA+I_2)(vA+I_2)\Leftrightarrow M(t)\cdot M(v)=$

$=tvA^2+tA+vA+I_2=-tvA+tA+vA+I_2=(t+v-tv)A+I_2=M(t+v-tv)$.

c) $M(1)+M(2)+...+M(2014)=A+I_2+2A+I_2+...+2014A+I_2=$

$=(1+2+...+2014)A+2014I_2=\frac{2014\cdot 2015}{2}A+2014I_2$. **2.** a) $e=4$ element neutru $\Rightarrow x*4=4*x=x$. Din $x*4=x\Leftrightarrow x+4+n=x\Leftrightarrow n=-4$. b) Legea "*" este asociativă dacă

Scanned with OKEN Scanner

$(x*y)*z=x*(y*z)$, $(\forall)x,y,z\in\mathbb{R}$. Se obține $x\circ y\circ z=x+y+z+2n$. c) $(x^2+2x)*x=0\Leftrightarrow x^2+3x-4==0\Rightarrow x_1=-4$ și $x_2=1$.

SUBIECTUL AL III-LEA

1. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=e^0+e^0=2$. $f'(x)=e^x+e^{-x}$. b) $f'(x)>0$, $(\forall)x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. c) Avem că $f'(x)+f''(x)=e^x+e^{-x}+$ $+e^x-e^{-x}=2\cdot e^x$. Atunci $S=2\left(e^1+e^2+...+e^{2014}\right)=2\cdot e\cdot\dfrac{1-e^{2014}}{1-e}$. **2.** a) F primitivă a lui $f\Rightarrow F$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x)=f(x),(\forall)x\in\mathbb{R}$. $F'(x)=\left(\dfrac{1}{2}\left[\ln x-\ln(x+2)\right]\right)'=$ $=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x+2-x}{x(x+2)}=\dfrac{1}{x(x+2)}=f(x)$. b) $\int\limits_1^e f(x)\cdot F(x)=\int\limits_1^e F(x)\cdot F'(x)dx=$ $=\dfrac{F^2(x)}{2}\Big|_1^e=\left(\dfrac{F^2(e)}{2}-\dfrac{F^2(1)}{2}\right)=\dfrac{1}{8}\left[\left(1-\ln(e+2)\right)^2+\ln^2 3\right]$. c) $A(\Gamma_g)=\int\limits_1^3 f(x)dx=\int\limits_1^3\dfrac{dx}{x(x+2)}==\dfrac{1}{2}\left(\ln x-\ln(x+2)\right)\Big|_1^3=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$.

VARIANTA 33

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $z^2=(2+i)^2=2^2+2\cdot 2\cdot i+i^2=4+4i-1=3+4i\Rightarrow \mathrm{Re}(z^2)=3$.

2. $\begin{cases}f(1)=3\\f(0)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$. Deci $f(x)=x+2$.

3. $\sqrt[3]{x^2-5x+3}=-1\Leftrightarrow x^2-5x+3=-1\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow x_1=1$ și $x_2=4$.

4. $P_i=$ prețul obiectului înainte de scumpire. $P_i+\dfrac{10}{100}\cdot P_i=594\Rightarrow P_i=540$ lei.

5. Fie $M(x_m;y_m)$ mijlocul segmentului $[BC]\Rightarrow x_M=\dfrac{x_B+x_C}{2}=\dfrac{1+3}{2}=2$ și $y_M=\dfrac{y_B+y_C}{2}=\dfrac{1+(-1)}{2}=0$. Ecuația medianei este $\begin{vmatrix}x & y & 1\\2 & 4 & 1\\2 & 0 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x=2$.

6. $tgB=\dfrac{AC}{AB}\Leftrightarrow\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{AB}\Leftrightarrow AB=12$. Aplicăm teorema lui Pitagora $BC^2=AB^2+AC^2\Leftrightarrow BC^2=225\Leftrightarrow BC=15$. Deci $P_{\triangle ABC}=AB+BC+CA=36$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & -1\\3 & 0\end{vmatrix}=0-(-3)=3$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $A\cdot B=\begin{pmatrix} a-3 & b-4 \\ 3a & 3b \end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix} a+3b & -a \\ 15 & -3 \end{pmatrix}$, $AB=BA\Leftrightarrow a-3=0,\ b-4=-a,$

$3a=15,\ 3b=-3\ \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-1 \end{cases}$. . c) Se verifică dacă $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_2$.

2. a) $f\vdots X-2\Leftrightarrow f(2)=0$.

b) $(X-2)(X^2+aX+b)=X^3+aX^2+bX-2X^2-2aX-2b=X^3+(a-2)X^2+$

$(b-2a)X-2b\Rightarrow a=-4$ şi $b=1$. Astfel, se foloseşte schema lui Horner.

c) Din relaţiile lui Viete $x_1+x_2+x_3=6,\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=9,\ x_1x_2x_3=2$ se obţine că

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=36-18=18$. Atunci

$$\frac{x_1}{x_2\cdot x_3}+\frac{x_2}{x_1\cdot x_3}+\frac{x_3}{x_1\cdot x_2}=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_1x_2x_3}=\frac{18}{2}=9.$$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x)=\dfrac{(x^2)'(x-3)-x^2\cdot(x-3)'}{(x-3)^2}=\dfrac{2x(x-3)-x^2}{(x-3)^2}=\dfrac{2x^2-6x-x^2}{(x-3)^2}=\dfrac{x^2-6x}{(x-3)^2}=$

$\dfrac{x(x-6)}{(x-3)^2}$. b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x-3}\cdot\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-3}=1,$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x-3}=3$, deci dreapta $y=x+3$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-6x}{(x-3)^2}=0\Leftrightarrow x^2-6x=0\Leftrightarrow x_1=0\notin(0,+\infty)$ şi $x_2=6\in(0,+\infty)$.

x	3		6		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	12	$\nearrow$	$\nearrow$

$f'(x)\le 0,\forall x\in(3,6]\Rightarrow$ funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(3,6]$.

$f'(x)\ge 0,\forall x\in[6,+\infty)\Rightarrow$ funcţia f este crescătoare pe intervalul $[6,+\infty)$.

2. a) $\int_1^2 x\cdot f(x)dx=\int_1^2 x\cdot\dfrac{x+2}{x}dx=\int_1^2(x+2)dx=\dfrac{x^2}{2}+2x\Big|_1^2=2+4-\left(\dfrac{1}{2}+2\right)=6-\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{2}$

b) $\int f(x)dx=\int\dfrac{x+2}{x}dx=\int\left(1+\dfrac{2}{x}\right)dx=x+2\ln x+C,\ x\in(0,\infty)$. O primitivă F a funcţiei f este de forma $F(x)=x+2\ln x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$. $F(1)=1+c\Rightarrow c=1\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$F(x)=x+2\ln x+1$. c) $g(x)=\left(\frac{x+2}{x}-1\right)\ln x=\frac{2\ln x}{x}\geq 0,\ \forall x\in[1,e]$.

$A=\int_1^e|g(x)|dx=\int_1^e\frac{2\ln x}{x}dx=2\int_1^e\ln x\cdot(\ln x)'dx=2\cdot\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e=\ln^2 x\Big|_1^e=1-0=1$.

VARIANTA 34

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $\left(-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)^2-\left(25-12\sqrt{6}\right)=12-12\sqrt{6}+18-25+12\sqrt{6}=30-25=5\in\mathbb{N}$.

2. $f(x)=-3x+4$ este descrescătoare pe intervalul $[-2,3]$. Valoarea maximă este $f(-2)=10$

. **3.** $x^2+(m-2)x+1=0$ are soluţii egale $x_1=x_2$ dacă $\Delta=0$. Avem că

$\Delta=b^2-4ac\Rightarrow\Delta=m^2-4m$. Din $m^2-4m=0\Rightarrow m\in\{0,4\}$.

4. $A=\left\{-1;\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ Se obţine $P=\frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

5. Fie $A'(x_A;y_A)$ simetricul lui A faţă de $B\Rightarrow B$ este mijlocul segmentului $[AA']$. Rezultă că:

$$\begin{cases}x_B=\frac{x_A+x_{A'}}{2}\\ y_B=\frac{y_A+y_{A'}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5=\frac{3+x_{A'}}{2}\\ 1=\frac{-1+y_{A'}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_{A'}=7\\ y_{A'}=3\end{cases}\text{ şi } A'(7,\ 3).$$

6. Din teorema sinusurilor avem: $\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$. Rezultă că $AC=\frac{BC\cdot\sin B}{\sin A}=\sqrt{3}\cdot BC$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A=\begin{pmatrix}m & -2 & 1\\ 2 & -m & -3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ şi $\text{Tr}(A)=m-m+2=2$. b) A este inversabilă dacă $\det A\neq 0$.

Se obţine că $\det(A)=-2m^2-2m+12$. Din $\det(A)=0\Rightarrow\ -2m^2-2m+12=0$ cu soluţiile

$m\in\{-3,2\}$. Rezultă că A este inversabilă dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{-3,2\}$.

c) Pentru $m=1$ soluţia este $(4;\ 2;\ 1)$ şi egalitatea are loc. **2.** a) $r=f(1)=2$.

b) Avem că $f\vdots X+1\Leftrightarrow f(-1)=0$. Se obţine că:

$f(-1)=(-1)^3+m\cdot(-1)^2+m\cdot(-1)+1=-1+m-m+1=0$, deci $X+1$ divide pe f.

c) Deoarece $f\vdots(X+1)\Rightarrow f=(X+1)\left(X^2+(m-1)X+1\right)$. Trebuie ca ecuaţia

$x^2+(m-)x+1=0$ să aibă soluţii reale. Avem că $\Delta=(m-1)^2-4\geq 0$, cu soluţia

$m\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x)=\left(\frac{2x^2-1}{x^2+2}\right)'=\frac{\left(2x^2-1\right)'\left(x^2+2\right)-\left(2x^2-1\right)\left(x^2+2\right)'}{\left(x^2+2\right)^2}=$

Scanned with OKEN Scanner

$= \frac{4x(x^2+2)-2x(2x^2-1)}{(x^2+2)^2} = \frac{10x}{(x^2+2)^2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+2} = 2 \Rightarrow y=2$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$. c) $f'(x) = \frac{10x}{(x^2+2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Se face tabelul de monotonie :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\nearrow$

Se observă din tabel că f este crescătoare pe $[0,1]$. Atunci $f(0) \le f(x) \le f(1), \forall x \in [0,1]$ $\Rightarrow -\frac{1}{2} \le f(x) \le \frac{1}{3}$. **2.** a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{x+1}{x+1}dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx =$ $= \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = x\Big|_0^1 - \ln(x+1)\Big|_0^1 = 1-\ln 2$. b) $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}dx + \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx =$ $= \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{x+1}dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$. c) Din $x \in [0,1] \Rightarrow 1 \le x+1 \le 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{x+1} \le 1 \Rightarrow$ $\frac{x^{2012}}{2} \le \frac{x^{2012}}{x+1} \le x^{2012}$. Cu monotonia integralei, $\int_0^1 \frac{x^{2012}}{2}dx \le \int_0^1 \frac{x^{2012}}{x+1}dx \le \int_0^1 x^{2012}dx$. Rezultă că $\frac{x^{2013}}{4026}\Big|_0^1 \le I_{2012} \le \frac{x^{2013}}{2013}\Big|_0^1 \Rightarrow \frac{1}{4026} \le I_{2012} \le \frac{1}{2013}$.

VARIANTA 35

SUBIECTUL I

1. $\log_2 8 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \sqrt[3]{8} = 3-4+2 = 1$ **.2.** $f(3) = 0 \Rightarrow$ produsul este egal cu 0. **3.** $2^{x^2-4x+2} = 2^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2-4x+2 = 2 \Leftrightarrow x^2-4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow S = \{0;4\}$. **4.** $C_{10}^8 = \frac{10!}{8!\,2!} = = \frac{8!\cdot 9\cdot 10}{8!\cdot 1\cdot 2} = 45$. **5.** $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(-2-1)^2+(-2-2)^2} = 5$ şi $AC = \sqrt{(5-1)^2+(-1-2)^2} = 5$, deci triunghiul ABC este isoscel. **6.** $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25} \Rightarrow |\cos x| = \frac{4}{5}$, dar $x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, deci $\cos x < 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{4}{5}$ şi $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{3}{4}$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $(-1;1;1)$ soluţie dacă $\begin{matrix} -1-2\cdot 1+(2m-1)\cdot 1 = 2 \\ m\cdot(-1)-1+3\cdot 1 = n \end{matrix}$. Se obţine că $m=3$ şi $n=-1$. b) Sistemul admite soluţie unică $\Leftrightarrow \det A \neq 0$. Avem că $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2m-1 \\ 2 & -1 & 3 \\ m & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2m^2-11m+14$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţia $2m^2-11m+14=0$ şi are soluţiile $m_1=2$ şi $m_2=\frac{7}{2}$. Deci sistemul are soluţie unică pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{2;\frac{7}{2}\right\}$. c) Prin înlocuire obţinem sistemul $\begin{cases}x-2y+z=2\\2x-y+3z=0\\x-y+3z=0\end{cases}$ cu $\det(A)=5\neq 0$, deci un sistem de tip Cramer.Calculăm $\Delta_x=\begin{vmatrix}2&-2&1\\0&-1&3\\0&-1&3\end{vmatrix}=0;\Delta_y=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&0&3\\1&0&3\end{vmatrix}=-6;$

$\Delta_z=\begin{vmatrix}1&-2&2\\2&-1&0\\1&-1&0\end{vmatrix}=-2$. Deci $x=0;y=-\frac{6}{5};z=-\frac{2}{5}$ şi $S=\left\{\left(0;-\frac{6}{5};-\frac{2}{5}\right)\right\}$. **2.** a) $(X+1)\mid f\Leftrightarrow f(-1)=0$. Dar $f(-1)=m+4$, deci $m=-4$. b) Din relaţiile lui Viete avem: $x_1+x_2+x_3=-\frac{m}{3}$ şi $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-\frac{4}{3}$. Deci, $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-$

$-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=\left(-\frac{m}{3}\right)^2-2\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{m^2}{9}+\frac{8}{3}=\frac{m^2+24}{9}$. c) Pentru $m=-4$ obţinem ecuaţia $3x^3-4x^2-4x+3=0$, deci o ecuaţie reciprocă de grad trei. Astfel $x_1=-1$ şi folosind, eventual, schema lui Horner obţinem descompunerea $(x+1)(3x^2-7x+3)=0$, de unde $3x^2-7x+3=0$ cu $x_2=\frac{7+\sqrt{13}}{6}$, $x_3=\frac{7-\sqrt{13}}{6}$.

SUBIECTUL AL III-LEA

1. a) $f'(x)=1+\cos x\geq 0,\forall x\in[0,2\pi]$. Rezultă că f este strict crescătoare pe $[0,2\pi]$.

b) $L=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\cos\frac{\pi}{2}=1$. c) $f''(x)=-\sin x,x\in[0,2\pi]$. Înlocuind, se obţine succesiv:

$(f'(x))^2+(f''(x))^2=(1+\cos x)^2+\sin^2 x=1+2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x=1+2\cos x+1=$

$2(1+\cos x)=2f'(x)$. **2.** a) $f_0(x)=x^0\cdot e^x=e^x,\forall x\in\mathbb{R}$. Se obţine că $\int f_0(x)dx=$

$=\int e^x dx=e^x+\mathscr{C}$. b) $A(\Gamma_{f_2})=\int_0^1 x^2e^x dx=\int_0^1 x^2(e^x)'dx=x^2e^x\Big|_0^1-\int_0^1 2xe^x dx=e-2\left(e-e^x\Big|_0^1\right)=e-2$

c) $\mathscr{V}(C_g)=\pi\int_0^1\left[\left(e^x+xe^x\right)e^{-x}\right]^2dx=\pi\int_0^1(1+x)^2dx=\pi\frac{(1+x)^3}{3}\Big|_0^1=\pi\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{7\pi}{3}$.

VARIANTA 36

SUBIECTUL I

1. $a_3=a_1+2r\Rightarrow r=5\Rightarrow a_{20}=97$. **2.** $f(-1)=0$, deci produsul este 0.

3. $C_6^3=20,C_5^3=10,C_6^3+C_5^3=30$. **4.** $5^{2x-1}=5^3\Rightarrow 2x-1=3\Rightarrow x=2$.

5. $AB=\sqrt{(-1-2)^2+(3+3)^2}=3\sqrt{5}$. **6.** $\cos 60^0=\frac{1}{2},\cos 120^0=-\frac{1}{2},\cos 60^0+\cos 120^0=0$.

SUBIECTUL AL II-LEA

Scanned with OKEN Scanner

1. a) $\det A = 1\cdot 1 - 0\cdot 2n = 1$. b) $A(n)\cdot A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(n+m) = \begin{pmatrix} 1 & 2(n+m) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(n)\cdot A(m)$. Egalitatea are loc. c) $A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B + A(3) = \begin{pmatrix} m+1 & m+6 \\ m & 6 \end{pmatrix}$, $\det(B + A(3)) = 6 - m^2 \Rightarrow 6 - m^2 = 0$, deci $m \in \{\pm\sqrt{6}\}$. **2.** a) $5 * (-2) = -5\cdot(-2) - 5 + 2 - 2 = 5$. b) $x * y = -xy - x - y - 2$ şi $y * x = -yx - y - x - 2$, pentru orice numere reale x, y; legea este comutativă. c) $x * x = -x^2 - 2x - 2 \Rightarrow -x^2 - 2x - 2 = -17 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -5$.

SUBIECTUL AL III-LEA

a) $f'(x) = 2\cdot 8x - \frac{1}{x} = 16x - \frac{1}{x}$, oricare ar fi $x \in (0,+\infty)$ şi $x\cdot f'(x) = 16x^2 - 1$, oricare ar fi $x \in (0,+\infty)$. b) $f''(x) = 16 + \frac{1}{x^2}$, oricare ar fi $x \in (0,+\infty)$. Din $f''(x) > 0$, oricare ar fi $x \in (0,+\infty) \Rightarrow f$ este convexă pe $x \in (0,+\infty)$. c) $f'(x) = \frac{16x^2 - 1}{x}$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{4} \notin (0,+\infty), x_2 = \frac{1}{4}$. Avem că: $f'(x) \le 0$ pentru orice $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe intervalul $\left(0, \frac{1}{4}\right]$. $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right) \Rightarrow f$ este crescătoare pe intervalul $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$. Din tabelul de variaţie al funcţiei obţinem $f(x) \ge f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} + 2\ln 2$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$. **2.** a) $f(x) + \frac{2x^3}{x^2+1} = x + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2x^3}{x^2+1} = x + \frac{2x(x^2+1)}{x^2+1} = 3x$ şi $\int_{-1}^{2} 3x\,dx = \frac{3x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$. b) $F'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + \ln(x^2+1)\right)' = x + \frac{2x}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$, deci $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \Rightarrow F$ este o primitivă a funcţiei f. c) $A = \int_1^2 |f(x)|\,dx = \int_1^2 \left(x + \frac{2x}{x^2+1}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln(x^2+1)\right)\Big|_1^2 = \left(\frac{4}{2} + \ln 5\right) - \left(\frac{1}{2} + \ln 2\right) = \frac{3}{2} + \ln\frac{5}{2}$.

VARIANTA 37

SUBIECTUL I

1. $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow V(-2,-9)$. **2.** $f(1) + f(2) + \ldots + f(10) = (3\cdot 1 - 4) + (3\cdot 2 - 4) + \ldots + (3\cdot 10 - 4) = 3\cdot(1+2+\ldots+10) - 4\cdot 10 = 3\cdot\frac{(1+10)10}{2} - 40 = 3\cdot 55 - 40 = 165 - 40 = 125$.

3. Condiţia de existenţă este $10 - x > 0 \Rightarrow x < 10 \Rightarrow$ Domeniul pentru soluţii: $D_S = (-\infty, 10)$. Ecuaţia este echivalentă cu $10 - x = 3^2 \Rightarrow x = 1 \in D_S$. **4.** Domeniul pentru soluţii:

Scanned with OKEN Scanner

$D_S=[3,+\infty)\cap\mathbb{N}$. Ecuaţia este echivalentă cu $\frac{(2n-3)!}{(2n-5)!}=20\Rightarrow(2n-4)(2n-3)=20$. Se obţine soluţia $n=4$. **5.** $P_{(ABC)}=AB+BC+CA=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}+\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}$ $+\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=4+\sqrt{13}+\sqrt{13}=4+2\sqrt{13}$. **6.** $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1,\sqrt{3},\frac{1}{4}\right\}, P=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $A_x\cdot A_y=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\y&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x+y&0&1\end{pmatrix}=A_{x+y}$. b) $A_x\cdot A_e=A_x\Rightarrow x+e=$ $=x\Rightarrow e=0$, deci $A_0=I_3$ este element neutru. c) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\Leftrightarrow A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, care rezultă din a). **2.** a) $f=X^4+2X^3+3X^2+2x+1$. b) $g=(X-1)(X+1)\Rightarrow x_1=1$, $x_2=-1\Rightarrow f(x_1)+f(x_2)=f(1)+f(-1)=9+1=10$. c) $q=X^2+2X+4, r=4X+5$.

SUBIECTUL AL III-LEA

a) $f'(x)=3x^2+3,\forall x\in\mathbb{R}$. b) $3x^2+3>0,(\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ funcţia este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+3x}{x^3}=1$. **2.** a) Calculând $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}=$

$=\frac{1}{x^2+3x+2}=f(x)$. Deci $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2},(\forall)x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\ln|x+1|\Big|_0^1-\ln|x+2|\Big|_0^1=\ln\frac{4}{3}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln|t+1|\Big|_0^x-\ln|t+2|\Big|_0^x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x+1}{x+2}+\ln 2\right)=\ln 2$.

VARIANTA 38

SUBIECTUL I

1. $16-8\sqrt{2}+2+16+8\sqrt{2}+2=36=6^2\Rightarrow$ pătrat perfect. **2.** $\Delta<0\Rightarrow(m-2)^2-16<0\Rightarrow$ $\Rightarrow m^2-4m-12<0$ cu mulţimea soluţiilor intervalul $(-2,6)$. **3.** $3^{x^2-5x}=3^6\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2-5x=6\Leftrightarrow x^2-5x-6=0$. Soluţiile sunt $x\in\{-1,6\}$. **4.** $D=1\,215-1\,200=15$, $D=S_0\cdot\frac{n}{12}\cdot\frac{p}{100}\Rightarrow 15=1\,200\cdot\frac{3}{12}\cdot\frac{p}{100}\Rightarrow 3p=15\Rightarrow p=5$. Aşadar, rata dobânzii este 5%. **5.** Fie C simetricul punctului A faţă de punctul B. Rezultă că B este mijlocul segmentului $[AC]$ şi $x_B=\frac{x_A+x_C}{2}$ şi $y_B=\frac{y_A+y_C}{2}$. După înlocuiri se obţine $x_C=0, y_C=-5$ şi $C(0,-5)$. **6.** $\frac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow\sin A=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. a) $\det(A)\neq 0\Rightarrow -6a+3\neq 0\Rightarrow a\neq\frac{1}{2}\Rightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. b) $-6a+3=a^2+12\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow a^2+6a+9=0\Rightarrow a=-3$. c) Pentru $a=0\Rightarrow \det(A)=3,\Delta_x=2,\Delta_y=-11,\Delta_z=-9$ şi soluţia $S=\left\{\left(\frac{2}{3},-\frac{11}{3},-3\right)\right\}$.

2. a) $(x-8)(y-8)+8=xy-8x-8y+64+8=xy-8x-8y+72=x\circ y,\forall x,y\in\mathbb{R}$. b) $x\in H\Rightarrow x\in(8,\infty)\Rightarrow x>8\Rightarrow x-8>0, y\in H\Rightarrow y\in(8,\infty)\Rightarrow y>8\Rightarrow y-8>0$. Înmulţim cele două relaţii obţinem: $xy-8x-8y+64>0\,|+8\Rightarrow xy-8x-8y+72>8\Rightarrow x\circ y\in(8,\infty)\Rightarrow$ $\Rightarrow x\circ y\in H$. c) Din punctul a) se obţine că $x\circ 8=8$ şi $8\circ x=8,\forall x\in\mathbb{R}$. Notând $1\circ 2\circ\ldots\circ 7=x$ şi $9\circ 10\circ\ldots\circ 2017=y$, rezultă că $1\circ 2\circ\ldots\circ 7\circ 8\circ 9\circ\ldots\circ 2017=(x\circ 8)\circ y=8\circ y=8$.

SUBIECTUL al III-lea

1. a) $f'(x)=\frac{5}{x}-\frac{10}{x^2},\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-5$. b) $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)\Rightarrow$ $\Rightarrow y-10=-5(x-1)\Rightarrow 5x+y-15=0$. c) Rezolvăm ecuaţia: $f'(x)=0\Rightarrow 5x-10=0\Rightarrow x=2$, $f(2)=5\ln 2+5=5.(\ln 2+1)=5\cdot(\ln 2+\ln e)=5\cdot\ln(2e)$. Tabelul de variaţie a funcţiei f este:

x	0	2	∞
$f'(x)$	$-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-$	0	$+\!+\!+\!+\!+\!+\!+\!+\!+$
$f(x)$	$\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow$	$5\ln(2e)$ (min)	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$

Rezultă că $f(x)\geq 5\ln(2e), x>0$.

2. a) $F'(x)=\ln x+\frac{x+2}{x}-4=\ln x+1+\frac{2}{x}-4=\ln x+\frac{2}{x}-3=f(x)\Rightarrow F$ este o primitivă a lui f. b) $\int_1^e f(x)\,dx=F(x)\big|_1^e=F(e)-F(1)=-3e+6$. c) $\int_1^2 f(x)\cdot F(x)\,dx=\int_1^2 F'(x)\cdot F(x)\,dx=$

$=\frac{F^2(x)}{2}\Big|_1^2=\frac{F^2(2)-F^2(1)}{2}=\frac{(4\ln 2-5)^2-1}{2}$.

VARIANTA 39

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $a_1=3,\ a_2=7,\ r=4,\ a_{15}=a_1+14r=59$.. **2.** $\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)=1-i^2\cdot 3=1+3=4$ şi $\mathrm{Re}(z)=4$. **3.** $4^{3x+2}=4^{-3}\Rightarrow 3x+2=-3\Rightarrow x=-\frac{5}{3}$. **4.** $480-\frac{25}{100}\cdot 480=360$ şi $360+\frac{25}{10}\cdot 360=450$. **5.** $m_d=2,\ m_{d_1}\cdot m_d=-1\Rightarrow m_{d_1}=-\frac{1}{2}$. Atunci ecuaţia este $y-3=-\frac{1}{2}\cdot(x+2)\sin x+2y-4=0$. **6.** Triunghiul este dreptunghic, $m(\widehat{A})=90°$. Se obţine $d(A,BC)=\frac{AB\cdot AC}{BC}=4{,}8$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A^2=O_3,\ A^2+I_3=I_3$. b) $(I_3-A)\cdot(I_3+A)=(I_3+A)(I_3-A)=I_3-A^2$.

Scanned with OKEN Scanner

c) $A-mI_3=\begin{pmatrix}-m & -1 & 2\\ 0 & -m & 0\\ 0 & 0 & -m\end{pmatrix}$, $m\in\mathbb{R}$. Rezultă că $\det(A-mI_3)=-m^3$. Rezultă că $-m^3=-8\Rightarrow m^3=8$ cu soluția reală $m=2$. **2.** a) $x^3+x^2-3x+1=0$. Aplicând schema lui Horner pentru divizorii termenului liber se obține $x_1=1$ și câtul $q=x^2+2x-1$ cu rădăcinile $x_2=-1-\sqrt{2}$ și $x_3=-1+\sqrt{2}$. b) $f(-1)=1\Rightarrow m=-1$. c) Din relațiile lui Viete $x_1+x_2+x_3=-2$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-3$, $x_1x_2x_3=-1$ rezultă că $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}=3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $l_s(0)=l_d(0)=f(0)=3\Rightarrow f$ continuă în $x_0=0$.

b) Pe intervalul $(0,+\infty)\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(1)=-\frac{1}{4}$, ecuația tangentei :

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Rightarrow y-\frac{5}{2}=-\frac{1}{4}(x-1).$$

c) $f(x)=\frac{1}{x+1}+2,\ \forall x\geq 0\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}<0,\ \forall x\geq 0\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$.

2. a) $\int f_3(x)dx=\int(6x^2-6x+4)dx=6\cdot\frac{x^3}{3}-6\cdot\frac{x^2}{2}+4x+C=2x^3-3x^2+4x+C$.

b) $\int_0^1 e^x\cdot f_0(x)dx=\int_0^1 e^x\cdot(3x+4)dx=\int_0^1(e^x)'\cdot(3x+4)dx=e^x\cdot(3x+4)\Big|_0^1-$ $\int_0^1 e^x\cdot(3x+4)'dx=(7e-4)-3e^x\Big|_0^1=4e-1$. c) Se obține $\frac{2m}{3}-\frac{3(m-1)}{2}+4=4$ și $m=\frac{9}{5}$.

VARIANTA 40

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $2^x=5\Rightarrow x=\log_2 5$, $5^y=2\Rightarrow y=\log_5 2$. $x\cdot y=\log_2 5\cdot\log_5 2=\frac{1}{\log_5 2}\cdot\log_5 2=1$.

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-1$. $G_f\cap Oy: x=0\Rightarrow y=f(0)=-1\Rightarrow A(0,-1)$, $G_f\cap Ox: y=0\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow B(1,0)$

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(1-0)^2+(0+1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. **3.** $\frac{1}{2^x}=4^{-1}$, $2^{-x}=2^{-2}\Rightarrow -x=-2\,|\,(-1)\Rightarrow x=2$. **4.** Avem că $a,b\in\{2,4,6,8\}$. Se obțin $4\cdot 4=16$ numere.

5. $A(1,2), B(-1,5), M(x,y)$. Se obține că $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+2\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=-\vec{i}+5\vec{j}$ și $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$. Din relația $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}$ se obține succesiv. $(\vec{i}+2\vec{j})+2(-\vec{i}+5\vec{j})=x\vec{i}+y\vec{j}\Leftrightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Leftrightarrow \vec{i}+2\vec{j}-2\vec{i}+10\vec{j}=x\vec{i}+y\vec{j} \Leftrightarrow -\vec{i}+12\vec{j}=x\vec{i}+y\vec{j} \Leftrightarrow x=-1, y=12 \Rightarrow M(-1,12)$. **6.** $\triangle ABC$ are $m(\hat{A})=90^\circ \Leftrightarrow BC^2=AB^2+AC^2$ (reciproca teoremei lui Pitagora).

$(2\sqrt{6})^2=(3+\sqrt{3})^2+(3-\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 24=9+6\sqrt{3}+3+9-6\sqrt{3}+3 \Leftrightarrow 24=24(A)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A^2=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1\\ -2 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1\\ -2 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$. b) I_2+2A este inversa matricei I_2-2A dacă $(I_2+2A)(I_2-2A)=I_2 \Leftrightarrow I_2^2-4A^2=I_2 \Leftrightarrow I_2-4O_2=I_2 \Leftrightarrow I_2=I_2(A)$.

c) $\det(A-xI_2)=4$,

$A-xI_2=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1\\ -2 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}-x\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1\\ -2 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}-x & 1\\ -2 & -\sqrt{2}-x\end{pmatrix}$. Avem că

$\det(A-xI_2)=\begin{vmatrix}\sqrt{2}-x & 1\\ -2 & -\sqrt{2}-x\end{vmatrix}=(\sqrt{2}-x)(-\sqrt{2}-x)+2=-2-x\sqrt{2}+x\sqrt{2}+x^2+2=x^2$ Din $x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$ **2.** a) $\hat{2}x+\hat{5}=\hat{1}\Rightarrow \hat{2}x=-\hat{4}=\hat{4}\Rightarrow \hat{2}x=\hat{4}$. Din tabelul de valori se obține:

x	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$
$\hat{2}x$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$

$x=\hat{2}, x=\hat{6}$. b) Avem egalitățile:

$\hat{0}^3=\hat{0},\ \hat{1}^3=\hat{1},\ \hat{2}^3=\hat{0},\ \hat{3}^3=\hat{3},\ \hat{4}^3=\hat{0},\ \hat{5}^3=\hat{5},\ \hat{6}^3=\hat{0},\ \hat{7}^3=\hat{7} \Rightarrow H=\{\hat{0},\hat{1},\hat{3},\hat{5},\hat{7}\}$.

c) $x^3=\hat{3},\ x\in\mathbb{Z}_8$. Conform punctului b) $\Rightarrow x=\hat{3}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f(x)=\frac{9^x-1}{3^x}=\frac{3^{2x}-1}{3^x}=\frac{3^{2x}}{3^x}-\frac{1}{3^x}=3^x-3^{-x}$. Avem că

$f'(x)=3^x\ln 3+3^{-x}\ln 3=\ln 3(3^x+3^{-x})\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}, \Rightarrow f$ nu are puncte de extrem.

b) $f''(x)=\left[\ln 3(3^x+3^{-x})\right]^1=\ln 3(3^x\ln 3-3^{-x}\ln 3)=\ln^2 3(3^x-3^{-x})$.

$\frac{f''(x)}{f(x)}=\frac{\ln^2 3(3^x-3^{-x})}{3^x-3^{-x}}=\ln^2 3,\ \ln^2 3=ax+b\Rightarrow a=0, b=\ln^2 3$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-3^{-x}}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x\ln 3+3^{-x}\ln 3}{1}=\ln 3\lim\limits_{x\to 0}(3^x+3^{-x})=\ln 3(1+1)=2\ln 3$.

2. a) $\int(x^2+e^x+2)dx=\frac{x^3}{3}+e^x+2x+c$ .b) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+3x+c_1, x\le 0\\ \frac{x^3}{3}+e^x+2x+c_2, x>0\end{cases}$, F este continuă în $x=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}F(x)=F(0)\Rightarrow c_1=1+c_2$. Din $F(-2)=0, c_1=4, c_2=3$ și

Scanned with OKEN Scanner

$F(1)=\frac{1}{3}+e+2+3=\frac{16}{3}+e$. c) $V=\pi\int_{-1}^{0}g^2(x)dx=\pi\int_{-1}^{0}(x+3)^2dx=\int_{-1}^{0}(x^2+6x+9)dx=$

$=\pi\left(\frac{x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}+9x\right)\Big|_{-1}^{0}=\pi\left[\left(\frac{0}{3}+3\cdot 0+9\cdot 0\right)-\left(-\frac{1}{3}+3-9\right)\right]=\pi\left(\frac{1}{3}+6\right)=\frac{19\pi}{3}$.

VARIANTA 41

SUBIECTUL I

1. Prin calcul direct avem: $\log_8 6\cdot\log_6 2-C_5^2+\log_{27}9=\log_{8^2}-\frac{5!}{2!3!}+\log_{3^3}3^2=\frac{1}{3}-10+\frac{2}{3}=-9$.

2. Avem coordonatele vârfului: $-\frac{b}{2a}=\frac{5}{2}$ şi $-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{9}{4}$, unde $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4=9$.

Cum $f(-1)=10$ şi $f(5)=4$, avem: dacă $x\in\left[-1,\frac{5}{2}\right]$ funcţia este monoton descrescătoare şi $f(x)\in\left[-\frac{9}{4},10\right]$, iar dacă $x\in\left[\frac{5}{2},5\right]$ funcţia este monoton crescătoare şi $f(x)\in\left[-\frac{9}{4},4\right]$. Deci, imaginea funcţiei date este intervalul $\left[-\frac{9}{4},10\right]$. **3.** Condiţii de existenţă: $x-4\geq 0$ şi $2x-8\geq 0$. Avem: $\sqrt{x-4}=2x-8\Rightarrow\left(\sqrt{x-4}\right)^2=(2x-8)^2\Rightarrow x-4=$

$=4x^2-32x+64\Rightarrow 4x^2-33x+68=0$. Cum $x_1=5, x_2=\frac{13}{4}$. Din cauza existenţei alegem doar soluţia $x_1=5$. **4.** Numerele prime de o cifră sunt: $2,3,5,7$ (sunt 4 numere). Numerele de două cifre sunt: $A_4^2=\frac{4!}{2!}=12$, de trei cifre sunt: $A_4^3=\frac{4!}{(4-3)!}=24$, de patru cifre sunt $A_4^4=\frac{4!}{(4-4)!}=24$. În total sunt: $12+24+24=60$ numere cu cel puţin 2 cifre distincte.

5. Aria unui triunghi este dată de formula: $A=\frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 1\\ a & a+1 & 1\end{vmatrix}=30$ se obţine că $|-3a+3|=30\Rightarrow|-a+1|=10\Rightarrow a\in\{-9;11\}$. **6.** Cum, într-un triunghi, laturii mai mare i se opune unghiul mai mare, trebuie calculat cosinusul unghiului opus laturii $[AC]$.

$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC}=\frac{16+49-64}{2\cdot 4\cdot 7}=\frac{1}{56}$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A+B)=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0-3\cdot(-2)=6$, $\det A=$

$=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}=2$. Atunci: $\det(A+B)-\det(A)=6-2=4$. b) Fie $C=A+B$.

Avem: $\det(A+B)=6$. $(A+B)^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. c) Prin calcul direct, avem: $AB-BA=$

Scanned with OKEN Scanner

$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. **2.** a) Condiția dată este echivalentă cu : $f(-1)=f(1)$. Dar: $f(-1)=(-1)^4-(a+1)\cdot(-1)^3+a\cdot(-1)^2+$ $+(2a-1)\cdot(-1)-3=0$ şi $f(1)=1^4-(a+1)\cdot 1^3+a\cdot 1^2+(2a-1)\cdot 1-3=2a-4$. Deci $2a-4=0\Rightarrow a=2$. b) Deoarece: $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-$ $-2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)$, relația devine: $(a+1)^2-2a=5\Rightarrow a^2+1=5\Rightarrow$ $\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$. c) Avem că $f=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_4)$. Se observă că $f(1)=(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)$. Rezultă că $2a-4=6$ şi $a=5$.

SUBIECTUL AL III-LEA

a) $f'(x)=\left(x^2+\frac{2}{x}\right)'=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2(x^3-1)}{x^2}, x\in(0,+\infty)$. b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=$ $=\frac{2\cdot 7}{4}=\frac{7}{2}$. c) Avem $f'(x)=\frac{2(x^3-1)}{x^2}=\frac{2(x^3-1)}{x^2}=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$. Rezultă că pe intervalul $(0,1)$ funcția este stict descrescătoare; iar pe $(1,+\infty)$ funcția este strict crescătoare.

2. a) $f'(x)=\left(e^x(x^2+1)\right)'=e^x(x^2+1)+e^x\cdot 2x=e^x(x+1)^2=g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci f este primitiva funcției g. b) $\int\limits_0^1 f(x)\cdot g(x)dx=\int\limits_0^1 f(x)\cdot f'(x)dx=\frac{1}{2}\cdot f^2(x)\Big|_0^1==\frac{1}{2}(4e^2-1)$.

c) $\text{Vol}=\pi\int\limits_{-1}^1 h^2(x)dx=\pi\int\limits_{-1}^1 g(x)dx=\pi\cdot f(x)\Big|_{-1}^1=\pi(f(1)-f(-1))=\pi\left(2e-\frac{2}{e}\right)$.

VARIANTA 42

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $\frac{5!-5\frac{5!}{3!}}{\frac{5!}{2!3!}}=2$. **2.** $a_2a_4=(3-r)(3+r)=5\Rightarrow r=\pm 2$ şi raţia fiind negativă, $r=-2$. $a_{10}=a_3+7r=-11$. **3.** $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$. Ecuaţia cerută va fi $x^2-2x-1=0$. **4.** $\vec{v}_1\perp\vec{v}_2\Rightarrow\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=0$ de unde $a\in\{-1,0\}$. **5.** $m(\sphericalangle A)=45^\circ$. Din teorema sinusurilor: $BC=\frac{4\sqrt{6}}{3}, AC=\frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{3}$. **6.** Condiția $2m=-1\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a) Calcul direct. b) $x_1=2$, $x_2=5$. c) $X=A^{-1}B=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 5\end{pmatrix}$.

2. a) Desfacere paranteze. b) $a=11$ .c) Elementul neutru este $e=11$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) Se impune condiția $\frac{2x-1}{2x+1}\geq 0$, de unde $D=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{1}{2},\infty\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $l=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{2x+1}=1$. Ecuația asimptotei orizontală spre $+\infty$ este $y=1$.

c) $g'(x)=\dfrac{4}{(2x+1)^2}>0$, deci g este strict crescătoare pe intervalele $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ și $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

2. a) $F'(x)=\left(ax^2+(b+2a)x+b+c\right)e^x=\left(2x^2-3\right)e^x$, deci

$a=2,b=-4,c=1$. b) $f(x)<0,\forall x\in[-1,1]\Rightarrow A=\left|\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx\right|=|F(1)-F(-1)|=e+\dfrac{7}{e}$.

c) $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}g^2(x)dx=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(2x^2-3\right)^2dx=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(4x^4-12x^2+9\right)dx=\pi\left(\dfrac{4x^5}{5}-4x^3+9x\right)\Big|_{-1}^{1}$.

VARIANTA 43

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Deoarece $f(25)=0$ rezultă că produsul este zero. **2.** Din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ singurele elemente care verifică inegalitatea sunt $1,2$ și 3 deci probabiltatea este egală cu $\dfrac{3}{5}=0,6$. **3.** Condiție: $x>\dfrac{7}{2}$. Ecuația se scrie: $2x-7=5\Rightarrow x=6$.

4. $\Delta\geq 0$ și $x_1\cdot x_2=1$ și $x_1\cdot x_2=\dfrac{\left(2-m^2\right)}{m}$ deci $\dfrac{\left(2-m^2\right)}{m}=1\Rightarrow m^2+m-2=0\Rightarrow m=-2$ și $m=1$. **5.** $\dfrac{x-4}{7-4}=\dfrac{y-7}{4-7}\Rightarrow x+y-11=0$.

6. $A_{(ABC)}=\sqrt{\dfrac{4+6+8}{2}\cdot\left(\dfrac{4+6+8}{2}-4\right)\cdot\left(\dfrac{4+6+8}{2}-6\right)\cdot\left(\dfrac{4+6+8}{2}-8\right)}=3\sqrt{15}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A^2=\begin{pmatrix}2&3\\4&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot2+3\cdot4&2\cdot3+3\cdot0\\4\cdot2+0\cdot4&4\cdot3+0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&6\\8&12\end{pmatrix}$.

b) $\det(B)=\begin{vmatrix}5&4\\6&5\end{vmatrix}=5\cdot5-6\cdot4=1$; ${}^tB=\begin{pmatrix}5&6\\4&5\end{pmatrix}$; $B^*=\begin{pmatrix}5&-4\\-6&5\end{pmatrix}$; $B^{-1}=\dfrac{1}{\det(B)}\cdot B^*\Rightarrow$

$B^{-1}=\begin{pmatrix}5&-4\\-6&5\end{pmatrix}$ sau se poate verifica că: $B\cdot B^{-1}=B^{-1}B=I_2$.

c) $C=\begin{pmatrix}16&6\\8&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&-4\\-6&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&2\\2&14\end{pmatrix}$. Se obține $C^2=\begin{pmatrix}328&64\\64&200\end{pmatrix}$.

2. a) $0=0+0\cdot\sqrt{15}$ și $0^2-15\cdot0^2=0\neq1\Rightarrow0\notin G$; $4+\sqrt{15}=4+1\cdot\sqrt{15}$ și $4^2-15\cdot1^2=1\Rightarrow$ $4+\sqrt{15}\in G$.b) Fie $x=a+b\sqrt{15}\in G$ și $y=c+d\sqrt{15}\in G\Rightarrow a^2-15b^2=1$ și $c^2-15d^2=1$, unde $a, b, c, d\in\mathbb{Z}$ $x\cdot y=\left(a+b\sqrt{15}\right)\cdot\left(c+d\sqrt{15}\right)=(ac+15bd)+(ad+bc)\sqrt{15}$,

$ac+15bd, ad+bc\in\mathbb{Z}$. $(ac+15bd)^2-15(ad+bc)^2=\left(a^2-15b^2\right)\cdot\left(c^2-15d^2\right)=$

$=1\cdot1=1\Rightarrow x\cdot y\in G$.c) Fie $x=a+b\sqrt{15}\in G$ și $x\cdot x'=x'\cdot x=1$. Arătăm că $x'\in G$.

$x\cdot x'=1\Rightarrow x'=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a+b\sqrt{15}}=\dfrac{a-b\sqrt{15}}{a^2-15b^2}=\dfrac{a-b\sqrt{15}}{1}=a+(-b)\sqrt{15}$. $a,-b\in\mathbb{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

$a^2-15(-b)^2=a^2-15b^2=1$, deci $x'\in G$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x)=\dfrac{\left(x^2+9\right)'(x+4)-\left(x^2+9\right)(x+4)'}{(x+4)^2}=\dfrac{2x(x+4)-x^2-9}{(x+4)^2}=\dfrac{x^2+8x-9}{(x+4)^2}, x\neq -4$

b) $f'(x)=0\Rightarrow x^2+8x-9=0$ cu $x_1=-9$, $x_2=1$. Tabelul de variaţie a funcţiei f este:

x	$-\infty$		-9		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-18	$\searrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

c) Se observă că $f_{\min}=2$ pentru $x\in(-4,+\infty)$ deci $f(x)\geq 2$, $\forall x\in(-4,+\infty)$. Aşadar $\dfrac{f(x)}{2}\geq 1$, $\forall x\in(-4,+\infty)$. **2.** a) $F'(x)dx=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}=f(x)$, $\forall x>0\Rightarrow F$ este o primitivă a funcţiei f.

b) $\displaystyle\int_1^2 F(x)\cdot f(x)dx=\int_1^2 F(x)\cdot F'(x)dx=\frac{F^2(x)}{2}\Big|_1^2=\frac{F^2(2)-F^2(1)}{2}=\frac{(4-\ln 2)^2-1}{2}$.

c) $\displaystyle\int_1^e F(x)dx=\int_1^e x^2dx-\int_1^e \ln x dx$. Dar $\displaystyle\int_1^e x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^e=\frac{e^3-1}{3}$ şi $\displaystyle\int_1^e \ln x dx=\int_1^e x'\cdot\ln x dx=$

$=x\cdot\ln x\Big|_1^e-\displaystyle\int_1^e x\cdot(\ln x)'dx=e-x\Big|_1^e=1\Rightarrow\int_1^e F(x)dx=\frac{e^3-4}{3}$.

VARIANTA 44

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $|z|=1$, deci $\bar{z}=\dfrac{1}{z}\Rightarrow z+\dfrac{1}{z}=z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)=1$.

2. $f_{\max}=\dfrac{-\Delta}{4a}=\dfrac{1+2m}{2}=\dfrac{2017}{2}\Rightarrow m=1008$. **3.** $3^x=y>0\Rightarrow y^2+y-2=0$ cu soluţia $y=1$. Rezultă că $3^x=1$ şi $x=0$. **4.** $(n+1)n=56$ cu soluţia $n=7\in\mathbb{N}$.

5. $m=tg45^\circ=1$. Ecuaţia $y+2=1\cdot(x-1)$ sau $y=x-2$.

6. $\sin 140^\circ=\sin 40^\circ$, $\cos 140^\circ=-\cos 40^\circ$. Rezultă $E=1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $\det(A)=-2a+4=0\Leftrightarrow a=2$. b) M,N,P coliniare $\Leftrightarrow\det(A)=0\Leftrightarrow a=2$.

c) $S=\dfrac{1}{2}|\det(A)|=|a-2|=3\Rightarrow a\in\{-1,5\}$. **2.** a) $q=X-1$, $r=m+4$. b) Din $f(x_1)=0, f(x_2)=0, f(x_3)=0$ prin adunare se obţine că $x_1^3+x_2^3+x_3^3-4\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+(x_1+x_2+x_3)+3m=0$. Se obţine că $3m=-12$ deci $m=-4$. c) Pentru $m=-4\Rightarrow$ din a) că $r=0$, deci $f=\left(x^2-1\right)(x-4)$ cu soluţiile $-1;1;4$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scanned with OKEN Scanner

1. a) caz $\frac{0}{0}$. Cu regula lui L'Hospital se obține $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\cos x}=f'(0)$. Dar $f'(x)=\left(2+4x^2-6x\right)e^{x^2}$ și $f'(0)=2$. b) Din $f'(x)=0\Rightarrow 4x^2-6x+2=0$ cu soluțiile $x_1=1$ și $x_2=\frac{1}{2}$. Rezultă că f este crescătoare pe $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ și $[1,+\infty)$ și descrescătoare pe $\left[\frac{1}{2},1\right]$. c) Din f crescătoare pe $[1,+\infty)$ rezultă că $x\geq 1\Rightarrow f(x)\geq f(1)=-\frac{1}{e}$.

2. a) $F'(x)=2x+\frac{m}{x}=\frac{2x^2+m}{x}=f(x)$ pentru $m=1$.

b) $A=\int_1^e\left(x^2+\ln x\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\ln x-x\right)\Big|_1^e=\frac{e^3+2}{3}$.

c) $\int_1^m\left(f(x)\right)dx=\int_1^m\left(2x+\frac{1}{x}\right)=\left(x^2+\ln x\right)\Big|_1^m=m^2+\ln m-1=m^2+e-1$ dacă $\ln m=e$ deci $m=e^e$.

VARIANTA 45

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $C_7^3-A_6^2=35-30=5$. **2.** Din $x^2+x-12=0\Rightarrow x\in\{-4,3\}$. Din tabelul de semn se obține că $x\in(-\infty,-4)\cup(3,+\infty)$. **3.** Notăm $2^x=y>0$. Se obține că $y^2-3y+2=0$ cu soluțiile $y=1$ și $y=2$. Rezultă că $x\in\{0,1\}$. **4.** $f\left(1+\sqrt{2}\right)+f\left(1-\sqrt{2}\right)=-\left(1+\sqrt{2}\right)-4-\left(1-\sqrt{2}\right)-4=-10$.

5. Ecuația este $y-y_A=m(x-x_A)$. Rezultă ecuația $y-3=2(x-1)\Leftrightarrow y-3=2x-2\Leftrightarrow y=2x+1$. **6.** Avem că $\cos(2374^\circ)=\cos(2014^\circ+360^\circ)=\cos(2014^\circ)$ și se aplică formula $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $\det A=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2-2=0$.

b) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 6 & 6\end{pmatrix}$, $3A=3\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 6 & 6\end{pmatrix}$. Rezultă că $A^2=3A$. c) $X(a)\cdot X(b)=(a\cdot A+I_2)(b\cdot A+I_2)=a\cdot b\cdot A^2+a\cdot A+b\cdot A+I_2{}^2=$ $=ab3A+aA+bA+I_2=(3ab+a+b)A+I_2=X(3ab+a+b)$, $(\forall)a,b\in\mathbb{R}$.

2. a) $\left(2\circ\sqrt{5}\right)\circ 1=\left(-2-\sqrt{5}+\sqrt{5}\right)\circ 1=(-2)\circ 1=-(-2)-1+\sqrt{5}=2-1+\sqrt{5}=1+\sqrt{5}$

$2\circ\left(\sqrt{5}\circ 1\right)=2\circ\left(-\sqrt{5}-1+\sqrt{5}\right)=2\circ(-1)=-2-(-1)+\sqrt{5}=-2+1+\sqrt{5}=-1+\sqrt{5}\Rightarrow$

$\Rightarrow 1+\sqrt{5}\neq -1+\sqrt{5}\Rightarrow$ egalitatea este falsă..

b) $\left.\begin{aligned}x\circ e&=-x-e+\sqrt{5}\\ e\circ x&=-e-x+\sqrt{5}\end{aligned}\right\}\Rightarrow -x-e+\sqrt{5}=-x,(\forall)x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -e+\sqrt{5}=0\Leftrightarrow e=\sqrt{5}\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) $2^x \circ 4^x = -2^x - 4^x + \sqrt{5} = -2^x - 2^{2x} + \sqrt{5}$. Se obține că $-2^x - 2^{2x} + \sqrt{5} = -6 + \sqrt{5}$ $\Leftrightarrow -2^x - 2^{2x} = -6 \big| (-1) \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^x = 6$. Notăm $2^x = t$, $t > 0 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0$ cu soluțiile $t_1 = 2 > 0$, $t_2 = -3 < 0$. Revenim la notație: $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$. b) $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$. c) $f''(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$. Avem că $f''(x) < 0, x > 0 \Rightarrow f$ este concavă pe $(0, +\infty)$. **2.** a) Avem că F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 2014\right)' = \frac{3x^2}{3} - 2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 + 0 =$$

$$= x^2 - 4x + 3 = f(x) \Rightarrow F \text{ este o primitivă a funcției } f.$$

b) $$\int_1^3 (x-2) f^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 2(x-2) f^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 f'(x) \cdot f^2(x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{f^3(x)}{3} \Big|_1^3 = \frac{1}{6} f^3(x) \Big|_1^3 = \frac{1}{6} \cdot 0 = 0.$$

c) $$A = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - 4 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + 3x \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

VARIANTA 46

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $N = \sqrt{\left(\sqrt{2014} + 1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{2014} - 1\right)^2} = \sqrt{2014} + 1 - \left(\sqrt{2014} - 1\right) = 2 \in \mathbb{N}$.

2. Prin ridicare la puterea a 3-a avem $3 - 2x = 27 \Rightarrow -2x = 24 \Rightarrow x = -12$.

3. $a_1 = 2a_2 - 4 \Rightarrow 2a_2 - a_1 = 4 \Rightarrow 2(a_1 + r) - a_1 = 4 \Rightarrow 2a_1 + 2r - a_1 = 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_1 + 2r = 4 \Rightarrow a_3 = 4$ **4.** $\log_2 5 \cdot \log_5 2 = \log_2 2 = 1$. Rezultă ecuația: $\log_2 (x^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$.

5. $AB: y = -(x-1)$ sau $x + y - 1 = 0$. **6.** $R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{16}{2\sqrt{1 - \frac{9}{25}}} = \frac{16}{2 \cdot \frac{4}{5}} = 10$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} = C$. b) $\det(A \cdot B) = 0 \Rightarrow C$ nu este inversabilă.

c) $\det(A \cdot X) = 0, \det I_3 = 1 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții.

2. a) $a(a-1) + a - 1 + 1 = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a \in \{-1, 1\}$.

b) Fie e elementul neutru, avem $x \circ e = e \circ x = x \Rightarrow ax + e + 1 = x \Rightarrow a = 1, e = -1$.

c) Trebuie ca $a = 1$ și $e = -1$, $1 \circ \Delta = \Delta \circ 1 = -1 \Rightarrow \Delta + 1 + 1 = -1 \Rightarrow \Delta = -3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scanned with OKEN Scanner

1. a) $f'(x)=2014^x\ln(2014)+2014\cdot x^{2013}, x\in\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\ln 2014$.

c) $f(0)=1, f'(0)=\ln 2014$, ecuaţia tangentei este $y-1=(\ln 2014)x$.

2. a) Se consideră funcţia $f:E\to\mathbb{R}$, $E\subseteq\mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe E rezultă că f admite primitive. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=f(0)=0\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}$, deci are primitive. b) $\int\limits_1^0 f(x)dx=\int\limits_{-1}^0(-xe^x)dx=-\int\limits_{-1}^0 x\cdot e^x dx=-\int\limits_1^0 x(e^x)'dx=-\left[xe^x\Big|_{-1}^0-\int\limits_{-1}^0 e^x dx\right]=$

$-\left[-\dfrac{1}{e}-e^x\Big|_{-1}^0\right]=-\left[-\dfrac{1}{e}-1+\dfrac{1}{e}\right]=1$. c) Fie F o primitivă a funcţiei f. Cum $F'(x)=f(x)$ şi $f(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ rezultă că F este crescătoare.

VARIANTA 47

SUBIECTUL I

1. $a_3=5\Rightarrow a_1+2r=5, a_6=11\Rightarrow a_1+5r=11$. Rezolvând sistemul format din cele două ecuaţii obţinem $a_1=1, r=2$. Avem $a_{2014}=a_1+2013\cdot r=4027$. **2.** Ecuaţia $f(x)=0$ are rădăcinile $x=2$ şi $x=3$. Punctele sunt $A(2,0)$ şi $B(3,0)$. **3.** Avem $6^{1-x}=6^{2x}\Rightarrow 1-x=2x$, deci $x=\dfrac{1}{3}$.

4. Sunt $A_5^2=\dfrac{5!}{(5-2)!}=4\cdot 5$ submulţimi ordonate cu două elemente. **5.** Panta dreptei este $-\dfrac{1}{3}$, deci $\dfrac{m+1}{1-2}=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow m=-\dfrac{2}{3}$. **6.** Din $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ rezultă $\sin^2 x=1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$, deci $\sin x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Deoarece $x\in(0°,90°)$. Se obţine $\sin x=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $3\cdot A(2)-4\cdot A(-1)=3\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$. Prin calcul obţinem rezultatul $\begin{pmatrix}10&-1\\-1&10\end{pmatrix}$.

b) $\left[A(x)\right]^2=A(x)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}x^2+1&2x\\2x&x^2+1\end{pmatrix}$. Din $\left[A(x)\right]^2=I_2$ rezultă $x=0$. c) Din b) avem că $\left[A(x)\right]^2=\begin{pmatrix}x^2+1&2x\\2x&x^2+1\end{pmatrix}(1)$ şi $2x\cdot A(x)+(1-x^2)\cdot I_2=2x\cdot\begin{pmatrix}x&1\\1&x\end{pmatrix}+(1-x^2)\cdot$

$\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+1&2x\\2x&x^2+1\end{pmatrix}(2)$. Din relaţiile (1) şi (2) $\left[A(x)\right]^2=2x\cdot A(x)+(1-x^2)\cdot I_2, \forall x\in\mathbb{R}$.

2. a) $f\vdots(X-1)\Leftrightarrow f(1)=0\Leftrightarrow 3m-3=0\Leftrightarrow m=1$. b) Din relaţiile lui Viete avem $x_1+x_2+x_3=-m$ şi $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m$. Atunci $x_1^2+x_2^2+x_3^3=m^2-2m$. Cum $x_i^3=-mx_i^2-mx_i+4-m$, pentru $i\in\{1,2,3\}$ prin însumare rezultă că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=$

$=-m(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-m(x_1+x_2+x_3)+12-3m=-m(m^2-2m)+m^2+12-3m=$

$=-m^3+3m^2-3m+12$. Avem că $-m^3+3m^2-3m+12=11\Leftrightarrow m^3-3m^2+3m-1=0\Leftrightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Leftrightarrow (m-1)^3=0\Leftrightarrow m=1$. c) $f=X^3+X^2+X-3=(X-1)(X^2+2X+3)$. Polinomul $X-1$ este ireductibil deoarece are gradul 1, iar polinomul X^2+2X+3 este ireductibil pentru că are gradul 2 şi $\Delta<0$.

SUBIECTUL AL III-LEA

1. a) Avem

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)(x^2+1)-2x(e^x+x)}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x(x^2+1-2x)+x^2+1-2x}{(x^2+1)^2}=\ =\frac{e^x(x-1)^2+1-x^2}{(x^2+1)^2},x\in\mathbb{R}.$$

b) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=f'(-1)=\frac{1}{e}$. c) Ecuaţia tangentei în punctul de abscisă 0 este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$. Deoarece $f(0)=1$ şi $f'(0)=2$ rezultă că ecuaţia cerută este $y-1=2x\Leftrightarrow y=2x+1$. **2.** a) $I_0=\int_2^4\frac{1}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_2^4=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{5}-\ln\frac{1}{3}\right)=\ =\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$.

b) $I_1=\int_2^4\frac{x}{x^2-1}dx=\int_2^4\frac{x+1-1}{x^2-1}dx=\int_2^4\left(\frac{x+1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)dx=\int_2^4\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}dx-$

$-\int_2^4\frac{1}{x^2-1}dx=\int_2^4\frac{1}{x-1}dx-I_0=\ln|x-1|\Big|_2^4-I_0=\ln 3-\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}=\frac{1}{2}\ln 5$. c) $I_{n+2}-I_n=\int_2^4\frac{x^{n+2}}{x^2-1}dx-$

$-\int_2^4\frac{x^n}{x^2-1}dx=\int_2^4\frac{x^{n+2}-x^n}{x^2-1}dx=\int_2^4\frac{x^n(x^2-1)}{x^2-1}dx=\int_2^4x^ndx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_2^4$.

VARIANTA 48

SUBIECTUL I

1. $\begin{cases}a_1+r=-1\\a_1+3r=0\end{cases}\Rightarrow 2r=1\Rightarrow r=\frac{1}{2}$ şi $a_1=-\frac{3}{2}$. Se obţine că $a_3=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2},a_5=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ şi

$S=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-\frac{3}{2}-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$. **2.** $\left|\frac{2x-1}{2}\right|\le 1\Leftrightarrow -1\le\frac{2x-1}{2}\le 1\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$

şi $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{0,1\}$. **3.** Axa de simetrie este dreapta de ecuaţie $x=-\frac{b}{2a}$,

$-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{2(m^2-1)}\Rightarrow\frac{3}{2(m^2-1)}=\frac{1}{2}\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m\in\{-2,2\}$. **4.** Elementele raţionale sunt

$\sqrt[3]{1}=1,\sqrt[3]{8}=2$ şi $\sqrt[3]{27}=3\Rightarrow P=\frac{3}{16}$. **5.** $S=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}=\frac{7\sqrt{2}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=21$.

6. $\sin 100^0=\sin(180^0-80^0)=\sin 80^0\Rightarrow\cos^2 80^0+\sin^2 100^0=\cos^2 80^0+\sin^2 80^0=1$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $A(0)=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&-1\end{pmatrix},A(3)=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-1\end{pmatrix},A(1)=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix},A(-1)=\begin{pmatrix}-1&-2\\-1&-1\end{pmatrix}$,

$A(0)+A(3)=\begin{pmatrix}-2&1\\3&-2\end{pmatrix}$ şi $A(1)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}$. **2.** $\det A=\begin{vmatrix}-1&x-1\\x&-1\end{vmatrix}=1-x(x-1)=$

Scanned with OKEN Scanner

$=-x^2+x+1$. $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & x-1\\ x & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & x-1\\ x & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+x^2-x & -2x+2\\ -2x & x^2-x+1\end{pmatrix}$. $2A=\begin{pmatrix}-2 & 2x-2\\ 2x & -2\end{pmatrix}$.

$A^2+2A+(\det A)I_2=\begin{pmatrix}x^2-x+1 & -2x+2\\ -2x & x^2-x+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 2x-2\\ 2x & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x^2+x+1 & 0\\ 0 & -x^2+x+1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$. **3.** $A(1)+A(3)+\ldots+A(99)=\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 1-1\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 3-1\\ 3 & -1\end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix}-1 & 99-1\\ 99 & -1\end{pmatrix}}_{\text{sunt 50 de matrici de adunat}}=$.

$=\begin{pmatrix}-50 & 1+3+\ldots+99-50\\ 1+3+\ldots+99 & -50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-50 & 2450\\ 2500 & -50\end{pmatrix}$. Se are în vedere că

$1+3+\ldots+99=\frac{(1+99)\cdot 50}{2}=\frac{100\cdot 50}{2}=2500$ (suma termenilor une progresii aritmetice).

2. a) $x*y=-3x(y-1)+3y-3+1=-3x(y-1)+3(y-1)+1=-3(x-1)(y-1)+1, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) $x*x=-2\Leftrightarrow -3x^2+6x=0\Rightarrow x=0$ sau $x=2$. Dar $x=2\notin G$, deci singura soluţie este $x=0$. c) $(\exists)e\in G$, $(\forall)x\in G, x*e=e*x=x$. Legea este comutativă $\Rightarrow x*e=e*x$. Avem din $x*e=x$ că $-3xe+3x+3e-2=x\Leftrightarrow -3xe+2x=3e-2=0\Leftrightarrow -3e(x-1)+2(x-1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)(-3e+2)=0$. Deci $e=\frac{2}{3}\in G$.

SUBIECTUL AL III-LEA

a) $f'(x)=\frac{\left(e^x\right)'\left(x^2+1\right)-e^x\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{e^x\left(x^2-2x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}, x\in\mathbb{R}$. b) $f'(x)=\frac{e^x(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}\geq 0$,

$(\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ crescătoare pe $\mathbb{R}$. c) Ecuaţia tangentei în punctul $M(x_0,y_0)$,

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Rezultă că $y-f(1)=f'(1)(x-1)$. Dar $f(1)=\frac{e}{2}$ şi $f'(1)=0$ şi

ecuaţia se scrie $y-\frac{e}{2}=0$. **2.** a) $f_1(x)=x\sqrt{x^0+1}=x\sqrt{2}$, $\int x\sqrt{2}dx=\sqrt{2}\frac{x^2}{2}+C\Rightarrow F(x)=$

$=\frac{x^2\sqrt{2}}{2}+C$. Avem că $F(1)=2\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}+C=2\Rightarrow C=\frac{4-\sqrt{2}}{2}\Rightarrow F(x)=\frac{x^2\sqrt{2}}{2}+\frac{4-\sqrt{2}}{2}$.

b) $\int_1^2\frac{\left(x\sqrt{x+1}\right)^2}{x^4}dx=\int_1^2\frac{x^3+x^2}{x^4}dx=\int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=\ln x\Big|_1^2-\frac{1}{x}\Big|_1^2=\frac{1}{2}+\ln 2$. c) $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Avem că $V=\pi\int_0^1\left(x\sqrt{x^n+1}\right)^2dx=\pi\int_0^1 x^2\left(x^n+1\right)dx=\int_0^1 x^{n+2}dx+\pi\int_0^1 x^2dx=\pi\frac{x^{n+3}}{n+3}\Big|_0^1+\pi\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=$

$=\frac{\pi}{n+3}+\frac{\pi}{3}$. Din egalitatea $\frac{\pi}{n+3}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{3+n+3}{3(n+3)}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2n+12=3n+9\Rightarrow n=3$.

VARIANTA 49

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=0$. **2.** $m-1>0\Rightarrow m>1, m\in(1,+\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

3. Condiția $2^x-1\geq 0\Rightarrow x\in[0,+\infty)$. Prin ridicare la pătrat avem: $2^x-1=1\Rightarrow x=1$.

4. Fie P prețul inițial. $P+10\%P=110\Rightarrow 110\%P=110\Rightarrow P=100$.

5. Vectorul $\overrightarrow{AB}=(4-2)\vec{i}+(-1-3)\vec{j}$, deci $\overrightarrow{AB}(2,-4)$.

6. $Aria=\dfrac{AB\cdot AC\sin A}{2}=\dfrac{4\cdot 5\cdot\frac{1}{2}}{2}=5$. S-a folosit $\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&0&1\\0&1&-2\end{pmatrix}$.b) Matricea A este inversabilă dacă și numai dacă determinantul matricei A este nenul. $Det(A)=-7\neq 0$ și matricea A este inversabilă.

c) Dacă $\Delta=\det(A)=-7$, sistemul este sistem de tip Cramer și soluțiile sunt:

$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta};\ y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta};\ z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$ unde $\Delta_x=\begin{vmatrix}-9&-3&1\\-1&0&1\\0&1&-2\end{vmatrix}$, $\Delta_y=\begin{vmatrix}2&-9&1\\1&-1&1\\0&0&-2\end{vmatrix}$, $\Delta_z=\begin{vmatrix}2&-3&-9\\1&0&-1\\0&1&0\end{vmatrix}$.

Se obține $x=-2,\ y=2,\ z=1$.

2. a) Se observă că $x*y=(x+3)\cdot(y+3)-3$ și prin calcul direct demonstrăm asociativitatea legii de compoziție. b) $\exists e\in\mathbb{R}$ astfel încât $(\forall)x\in\mathbb{R}$ are loc relația $x*e=e*x=x$. Rezolvând ecuația $x*e=x$ se obține $e=-2$, iar egalitatea cealaltă trebuie verificată.

c) $\exists a\in\mathbb{R}$ pentru care $x*a=a*x=a, a=-3$ și atunci u se scrie $u=x*(-3)*y=-3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=-\dfrac{1}{2}$, deoarece $f'(x)=\dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2}$.

b) Asimptote vertical nu există. Asimptote orizontale: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^x}{1+e^x}=-1$, așadar $y=-1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-e^x}{1+e^x}=+1$, deci $y=1$ asimptotă orizontală spre $-\infty$.

c) $f'(x)=\dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2}$, așadar $f'(x)\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ deci funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ și folosind b) obținem $1\geq f(x)\geq -1$. **2.** a) Se demonstrează continuitatea funcției f, deci admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Fie primitiva $F(x)=\begin{cases}x^2+x+C_1, & \text{dacă } x\leq 0\\ \dfrac{x^3}{3}+x^2+x+C_2, & \text{dacă } x>0\end{cases}$. Funcția F trebuie să fie derivabilă, deci continuă pe $\mathbb{R}$. Din continuitatea în punctul 0 obținem $C_1=C_2$ și deoarece $F(1)=\dfrac{1}{3}$, obținem

Scanned with OKEN Scanner

$C_1 = C_2 = -2$. Primitiva cerută va fi: $F(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, \text{ dacă } x \le 0 \\ \frac{x^3}{3} + x^2 + x - 2, \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$.

c) Funcția f este pozitivă pe intervalul $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ și negativă pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ și atunci aria suprafeței va fi $A = -\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$.

VARIANTA 50

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Leftrightarrow G_f \cap Ox = \{(3,0)\}$. Avem și $G_f \cap Oy = \{(0,-3)\}$.

2. $x = 5 \Leftrightarrow m^2 5 + 3m - 5 = m^2 + 2 \Leftrightarrow 4m^2 + 3m - 7 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{7}{4}; m_2 = 1$ **.3.** Condiție: $5x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{5} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$. Avem: $\log_3(5x-1) = 2 \Leftrightarrow 5x - 1 = 3^2 \Leftrightarrow x = 2 \in \left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$.

4. $\begin{pmatrix} A \in G_f \Rightarrow f(-1) = 7 \Leftrightarrow -a + b = 7 \\ B \in G_f \Rightarrow f(2) = 4 \Leftrightarrow 2a + b = 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 7 \\ 2a + b = 4 \end{cases}$ cu soluțiile $a = -1, b = 6$. Se obține $f(x) = -x + 6$. **5.** $x_G = \frac{3 + 2 - 14}{3} = -3, y_G = \frac{-2 - 3 + 8}{3} = 1; G(-3,1)$.

6. $A_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin(\sphericalangle ABC)}{2} = 4\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $\det(A+B) = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = 1$. b) $C = A + B$ și $\det(A+B) = 1 \neq 0 \Rightarrow C$ inversabilă și $C^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$. c) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = A$.

2. a) $x * y = xy + x + y = x(y+1) + (y+1) - 1 = (x+1)(y+1) - 1$.

b) $(x^2 - 2) * 3 = 4 \Leftrightarrow (x^2 - 2 + 1)(3+1) - 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{3}{2}$.

c) Verificăm că $x * (-1) = -1$ și $(-1) * y = -1, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Atunci $E = (-2014) * (-2013) * \ldots * (2013) * (2014) = x * (-1) * y = -1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 2x} = 1$;

$n = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 2x} - 1 \cdot x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-x + 2}{x + 2} = -1$.

Ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ este $y = x - 1$. b) $f'(x) = \left(\frac{x^2 + x + 2}{x + 2}\right)' = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+4x=0 \Rightarrow x_1=-4, x_2=0$.

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Din tabelul de variație rezultă că -4 este punct de maxim local și 0 este punct de minim local. **2.** a) $\int f(x)dx=\int\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^2}{2}-\ln x+c$. b) $\int_2^4\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)dx=\int_2^4 xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_2^4=6$.

c) $Vol(C_g)=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\pi\int_1^2\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}-2x-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\frac{5\pi}{6}$.

VARIANTA 51

SUBIECTUL I

1. $125^{\frac{1}{3}}-\log_2 32+\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=\sqrt[3]{125}-\log_2 2^5+5=5-5+5=5$. **2.** Se rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuația $f(x)=0$. Se obține că $x^2+2x+3=0$, pentru care $\Delta=4-12<0$. Rezultă că ecuația nu are soluții reale, deci graficul nu intersectează axa Ox. **3.** Ecuația este echivalentă cu $3^{x^2-4x+8}=3^{2x}$ și se obține că $x^2-4x+8=2x$ cu soluțiile $x_1=2$ și $x_2=4$. **4.** Cifrele impare sunt 1,3,5,7,9. Atunci avem A_5^3 numere de 3 cifre distincte adică $\frac{5!}{2!}=3\cdot4\cdot5=60$ numere. **5.** Punctul $A(2,2)$ aparține dreptei de ecuație $-3x+my+4=0$, dacă $-3\cdot2+m\cdot2+4=0$. Se obține $m=1$. **6.** Utilizăm formula $A_{(ABC)}=\frac{AB\cdot BC\cdot\sin B}{2}$. Se obține $6=\frac{3\cdot8\cdot\sin B}{2}$, de unde $\sin B=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $B=A-I_3=\begin{pmatrix}0&2&5\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$. b) $\det(A)=1\neq0$. $A^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\5&3&1\end{pmatrix}\Rightarrow A^*=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Cum $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^*\Rightarrow A^{-1}=A^*$. c) Folosim punctul a) obținem că

$A^3=(B+I_3)^3\Rightarrow A^3==B^3+3B^2+3B+I_3$. Cum $B^2=\begin{pmatrix}0&0&6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B^3=B^2\cdot B=O_3$. Se obține că

$A^3=3B^2+3B+I_3=\begin{pmatrix}1&6&33\\0&1&9\\0&0&1\end{pmatrix}$. **2.** Prin efectuarea calculelor obținem:

$x\circ y+3(x-2)(y-2)==-3xy+6x+6y-10+3xy-6x-6y+12=2$. b) Se determină

Scanned with OKEN Scanner

elementul neutru al legii de compoziție. Din egalitatea $x\circ e=x$ avem $-3xe+6x+6e-10=x$, de unde $e=\frac{5}{3}$. Simetricul elementului $a=3$ verifică relația $3\circ s=s\circ 3=\frac{5}{3}$. Se obține $s=\frac{19}{9}$.

c) Folosind punctul a) obținem $x\circ y=-3(x-2)(y-2)+2$ Atunci ecuația devine $-3(x-2)^2+2=-1$. De aici $(x-2)^2=1$ cu soluțiile $x_1=1$ și $x_2=3$.

SUBIECTUL AL III-LEA

1. a) Funcția este continuă în $x_0=0$ dacă $l_s(0)=l_d(0)=f(0)$. Se obține: $l_s(0)=$ $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(e^x-3x)=1, l_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\sqrt{x}+1)=1$ și $f(0)=1$. b) Cum $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}+1)=$ $=+\infty$, f nu admite asimptotă orizontală către $+\infty$. Verificăm existența asimptotei oblice, a cărei ecuație se obține utilizând formula: $y=mx+n, m\neq 0,$, unde $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ și $n=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$. Atunci $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+1}{x}=0$. Deoarece $m=0$, f nu admite nici asimptotă oblică spre $+\infty$. c) $f''(x)=e^x$ pentru $x\in(-\infty,0)$. Cum $f''(x)>0$ pe intervalul $(-\infty,0)$, rezultă că f este convexă pe $(-\infty,0)$. **2.** a) $\int_1^2\left(f(x)+\frac{2}{x}\right)dx=\int_1^2 3x^2dx=x^3\Big|_1^2=7$. b) $V=\pi\int_2^3 h^2(x)dx=$ $=\pi\int_2^3\left(9x^4-12x+\frac{4}{x^2}\right)dx=\pi\left(\frac{9x^5}{5}-6x^2-\frac{4}{x}\right)\Big|_2^3=\frac{5257}{15}\pi$. c) Prin înlocuire obținem: $\int_1^e x^2\ln x dx=$ $=\int_1^e\left(\frac{x^3}{3}\right)'\ln x dx=\frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx=\frac{2e^3+1}{9}$. Pentru a doua integrală utilizăm metoda schimbării de variabile. $\int_1^e\frac{1}{x}\ln x dx=\int_1^e\ln x\cdot(\ln x)'dx=\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e=\frac{1}{2}$. Rezultă că $\int_1^e\left(3x^2-\frac{2}{x}\right)\ln x dx=$ $=3\cdot\left(\frac{2e^3+1}{9}\right)-2\cdot\frac{1}{2}=\frac{2(e^3-1)}{3}$.

VARIANTA 52

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Fie $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. Rezultă că $3(a+bi)+2(a-bi)=5-7i$. Din egalitatea de numere complexe se obține că: $\begin{cases}3a+2a=5\\3b-2b=-7\end{cases}$ de unde $a=1, b=-7$. **2.** $V\left(-\frac{b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$. Se obține că $V\left(-\frac{p}{2},-\frac{p^2-4q}{4}\right)$ și $-\frac{p}{2}=3$ și $\frac{-p^2+4q}{4}=4$. Rezultă $p=-6, q=13$.

3. Condiții $5x+1>0, x-3>0$ deci $x\in(3,+\infty)$. Avem că $\log_3\frac{5x+1}{x-3}=2$, deci $\frac{5x+1}{x-3}=9$. Rezultă că $x=7$. **4.** Dacă $\overline{abcd}$ este număr cu cifre distincte, avem A_6^4 alegeri pentru a,b,c,d. Dar se îndepărtează alegerile de forma $\overline{0bcd}$, adică A_5^3 variante. Numărul cerut este

Scanned with OKEN Scanner

$A_6^4 - A_5^3 = 300$.**5.** Ecuația are forma $y - y_A = m(x - x_A)$, unde $m \cdot m_{BC} = -1$. Cum $m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = +2$, rezultă că $m = -\frac{1}{2}$. Ecuația înălțimii este $y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 4)$ sau $x + 2y - 2 = 0$. **6.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cos\alpha$. Rezultă $\cos\alpha = \frac{3 \cdot 2 - 5 \cdot 3}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} < 0$ deci α este obtuz.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 11 & 8 & 11 \\ 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.b) $\det(A) = 3m - 6 \neq 0$ dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

c) Pentru $m = 3$, $\det(A) = 3 \neq 0$, deci sistemul este de tip Cramer. Se obține $x = 3, y = 2, z = -2$. **2.** a) Se pun condițiile $f(1) = 0, f(2) = 0$. Se obține că $a + b = 1$ și $2a + b = 0$ cu soluțiile $a = -1, b = 2$. b) Folosind algoritmul general de împărțire a polinoamelor se obține că $q = X - 1$ și $r = (a - 4)X + b + 3$. Din condiția $r = 0$ rezultă că $a = 4, b = -3$ .c) Din relațiile lui Viete $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 4$ se obține că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = -4$. Numerele x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile polinomului f avem că $f(x_1) = 0, f(x_2) = 0$ și $f(x_3) = 0$. Prin adunare rezultă că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4(x_1 + x_2 + x_3) - 9 = 0$ de unde $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -7$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2}{(x-3)(2x+6)} = 1$. b) $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 3x} = 2$ și $n = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^2}{x-3} - 2x \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{6x}{(x-3)} = 6$. Asimptota oblică este $y = 2x + 6$. c) Studiem monotonia funcției pe $[4,9]$. Avem că $f'(x) = \frac{2x^2 - 12x}{(x-3)^2}$. Ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x_1 = 0$ și $x_2 = 6$. Tabelul de monotonie :

x	4		6		9
$f'(x)$	− − − − − − − − −		0	+ + + + + + + +	
$f(x)$	32	↘ ↘ ↘ ↘ ↘	24	↗ ↗ ↗ ↗	27

Rezultă că $24 \leq f(x) \leq 32$, $\forall x \in [4,9]$. **2.** a) $F'(x) = f(x) = e^x + x$ și $F''(x) = (e^x + x)' = e^x + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci f este convexă pe $\mathbb{R}$.

b) $V = \pi \int_0^1 f^2(x)dx = \pi \int_0^1 (e^x + x)^2 dx = \int_0^1 (e^{2x} + 2xe^x + x^2)dx = \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} + 2(x-1)e^x + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 =$

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{3e^2+11}{6}\pi$. c) $\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{-\left(1+e^{-x}\right)'}{1+e^{-x}}=\frac{-u'}{u}$.

Atunci $\int_0^1\frac{1}{f'(x)}dx=\int_0^1\frac{-u'}{u}dx=-\ln\left(1+e^{-x}\right)\Big|_0^1=-\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)+\ln 2=\ln\frac{2e}{1+e}$.

VARIANTA 53

SUBIECTUL I

1. Se obţine că $21\in\mathbb{N}$. **2.** Cum $f(1)=0$ atunci $f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)=0$. **3.** Avem $3^{x+6}=\frac{1}{9^x}\Rightarrow 3^{x+6}=9^{-x}\Rightarrow x+6=-2x\Rightarrow 3x=-6$. Deci $x=-2$. **4.** Dacă x este preţul produsului atunci din $\frac{11}{10}x=660$ şi obţinem $x=600$. **5.** Cum $A\in(d)$ avem că $12a+15+9=0$ de unde $a=-2$. **6.** Avem $\text{tg}^2 30^\circ+\text{ctg}^2 60^\circ-\sin^2 135^\circ=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) Din $2n-2=n^2-n$ obţinem $n^2-3n+2=0$ cu rădăcinile $n_1=1$ şi $n_2=2$ şi cum $n\in\mathbb{N}$ rezultă $n\in\{1,2\}$. b) Pentru $n=2$ avem $A_2(2,2)$ şi pentru $n=3$ avem $A_3(4,6)$. Ecuaţia dreptei (A_2A_3) este $\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-2}{6-2}\Rightarrow 2x-y-2=0$. c) Avem $A_1(0,0), A_2(2,2), A_3(4,6)$ şi $S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}|\Delta|=2$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}0&0&1\\2&2&1\\4&6&1\end{vmatrix}=4$. **2.** a) $f=X^3+X^2+X+1=(X+1)(X^2+1)$ cu soluţia reală $x=-1$. b) Din $f(1)=2$ şi $f(-2)=9$ obţinem $a=3, b=-3$. c) Pentru $a=-2, b=0\Rightarrow f=X^3-2X^2+X=X(X^2-2X+1)$ cu rădăcinile $x_1=0, x_2=x_3=1$.

SUBIECTUL AL III-LEA

a) Se obţine $f'(x)=\frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$. b) Avem $\lim\limits_{x\to\infty}x^2f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^4+2x^2}{x^4+2x^2+1}=-2$. c) Avem $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=2$ şi $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x^2+1}=0$.

Asimptota oblică este $y=2x$. **2.** a) Avem $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{3-x}\right)dx=\int_1^2\left(x^2+3+\frac{1}{3-x}-\frac{1}{3-x}\right)dx=$

$=\int_1^2(x^2+3)dx=\left(\frac{x^3}{3}+3x\right)\Big|_1^2=\frac{16}{3}$. b) Din F primitivă a funcţiei f avem că $F'(x)=f(x)>0$ pentru orice $x\in[0,2]$ şi deci F este funcţie strict crescătoare pe intervalul $[0,2]$.

c) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+3+\frac{1}{3-x}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+3x-\ln|3-x|\right)\Big|_0^1=\frac{10}{3}+\ln\frac{3}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 54

SUBIECTUL I

1. Funcţia este strict descrescătoare dacă $m+3<0$. Se obţine $m\in(-\infty,-3)$. **2.** Numerele sunt în progresie aritmetică cu raţia $r=11$. Avem că $S_{12}=\frac{(1+122)12}{2}=738$. **3.** Condiţie: $1-2x\geq 0$, deci $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$. Rezultă că $\left(\sqrt{1-2x}\right)^2=5^2$ sau $1-2x=25$ cu soluţia $x=-12$. **4.** Fie x preţul iniţial. Atunci $x-\frac{15}{100}x=255$. Se obţine $x=300$ lei. **5.** Produsul scalar este zero. Rezultă că $3m\cdot m-3\cdot 4=0$, cu soluţiile $m\in\{-2,2\}$. **6.** Avem că $\sin 70^0=\cos 20^0$ şi $\cos 70^0=\sin 20^0$. Atunci $m=\left(\sin^2 20^0+\cos^2 20^0\right)\cdot\left(\cos^2 20^0+\sin^2 20^0\right)=1\cdot 1=1$.

SUBIECTUL al II-lea

1. a) $A=\begin{pmatrix} m & 1 & -2\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -m & -1\end{pmatrix}$ şi $\det A(-1)=3$. b) Condiţie: $\det A(m)\neq 0$. Se obţine că $\det A(m)=4-m^2\neq 0$ cu $m\in\mathbb{R}\setminus\{2,-2\}$. c) Dacă $m=1$ se obţine că $\det A(1)=3\neq 0$. Sistemul este de tip Cramer. Avem $D_x=0, D_y=2, D_z=-5$, deci $x=0, y=\frac{2}{3}, z=\frac{-5}{3}$.

2. a) Deoarece $g=(X-1)(X+2)$, rezultă că $X-1/f$ şi $X+2/f$, deci $f(1)=0, f(-2)=0$. Se obţine că $a=-5, b=6$. b) Din $x^3-2x^2-x+2=0$ rezultă că $x^2(x-2)-(x-2)=0$ sau $(x-2)\left(x^2-1\right)=0$ cu soluţiile $x\in\{2,-1,1\}$. c) Avem că $\frac{1}{10}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1\cdot x_2\cdot x_3}=\frac{1}{-b}$, deci $b=-10$.

SUBIECTUL al III-lea

1. a) Avem că $f'(x)=\frac{10x}{\left(x^2+1\right)^2}, x\in\mathbb{R}$. Rezultă că $f'\left(\sqrt{2}\right)=\frac{10\sqrt{2}}{9}$. b) Din $f'(x)=0$ se obţine că $x=0$. Rezultă că f este descrescătoare pe $(-\infty,0]$ şi crescătoare pe $[0,+\infty)$, deci $x=0$ este punct de minim. c) Pe intervalul $[0,2]$, funcţia f este crescătoare. Din $0\leq x\leq 2$ se obţine că $f(0)\leq f(x)\leq f(2)$, deci $-2\leq f(x)\leq 2$.

2. a) Avem că $g'(x)=\left(3x^2+\ln x\right)'=6x+\frac{1}{x}=f(x)$, deci g este primitivă pentru f. b) $I=\int_1^e g(x)g'(x)\,dx=\frac{g^2(x)}{2}\Big|_1^e=\frac{1}{2}\left(g^2(e)-g^2(1)\right)=\frac{1}{2}\left(9e^4+6e^2-8\right)$. c) $A=\int_1^2 g(x)\,dx=$ $=\int_1^2\left(3x^2+\ln x\right)dx=\left(x^3+x\ln x-x\right)\Big|_1^2=6+2\ln 2$.

VARIANTA 55

SUBIECTUL I

Scanned with OKEN Scanner

1. $a=\frac{2+1}{\sqrt{2}}\cdot 3\sqrt{2}=9\in\mathbb{N}$. **2.** Primul preţ este $100-\frac{20}{100}\cdot 100=100-20=80$ *lei*. Următorul preţ este $80+\frac{20}{100}\cdot 80=80+16=96$ *lei*. Se constată că preţul s-a micşorat cu 4%. **3.** Cond. $5-x^2>0\Rightarrow x\in\left(-\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$, $5-x^2=1\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2\in\left(-\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$. **4.** $r=4$, $a_{10}=a_1+9r=2+9\cdot 4=2+36=38$. **5.** $A_{(ABC)}=\frac{12\cdot 12\cdot\sin 30^0}{2}=6\cdot 12\cdot\frac{1}{2}=36$.

6. $\sin 135^0-\cos 45^0=\sin\left(180^0-135^0\right)-\cos 45^0=\sin 45^0-\cos 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $\begin{vmatrix}1&3&1\\-1&-3&1\\0&0&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow A,B,O$ coliniare. b) $\begin{vmatrix}x&y&1\\1&3&1\\-1&-3&1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 3x-3-y+3+3x-y=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x-2y=0\Leftrightarrow 3x-y=0$. c) $A=\frac{1}{2}|\Delta|$, $\Delta=\begin{vmatrix}1&3&1\\-1&-3&1\\2&m+1&1\end{vmatrix}=-3-m-1+6+6-m-1+3=$

$=-2m+10$ Rezultă că $\frac{1}{2}|-2m+10|=4\Leftrightarrow|-2m+10|=8\Leftrightarrow -2m+10=\pm 8$: $-2m+10=8\Leftrightarrow m=1$ şi $-2m+10=-8\Leftrightarrow m=9$. **2.** a) $f(-1)=0\Rightarrow -2+a+2-1=0\Rightarrow a-1=0\Rightarrow a=1$.

b) $f=2X^3+X^2-2X-1$, $x_3=-1$ rădăcină. Alcătuim schema lui Hotner.

	2	1	−2	−1
−1	2	−1	−1	0

Se obţine câtul $2x^2-x-1$ şi avem că $2x^2-x-1=0$ pentru $x_1=1, x_2=-\frac{1}{2}$. Aşadar, $S=\left\{-1,1,-\frac{1}{2}\right\}$. c) Se obţine ecuaţia $a^2-2=a$ cu soluţiile $a_1=-1$ şi $a_2=2\in(0,+\infty)$.

SUBIECTUL AL III-LEA

1. a) $f'(x)=\frac{x'(x+2)-x(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{x+2-x}{(x+2)^2}=\frac{2}{(x+2)^2}$. b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+2}=1\Rightarrow$

$\Rightarrow y=1$ asimptotă orizontală la $+\infty$. c) $f'(x)=0\Rightarrow x\in\varnothing$. Tabelul de semn :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+++++++$	‖	$+++++++$
$f(x)$	↗↗↗↗↗	‖	↗↗↗↗↗

Pentru $x\in(-\infty,-2), f'(x)>0\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(-\infty,-2)$. Pentru $x\in(-2,+\infty)\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(-2,+\infty)$. **2.** a)

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $x\in(-\infty,-2)\Rightarrow f(x)=\frac{x}{2}-\frac{2}{x}$ continuă, fiind obținută prin operații cu funcții continue.

Pentru $x\in(-2,+\infty)\Rightarrow f(x)=\sqrt{x+2}$ continuă, fiind operații cu funcții continue. Studiem continuitatea pentru $x=-2$. Avem

$l_s(-2)=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)=\frac{-2}{2}-\frac{2}{-2}=0, l_d(-2)=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\sqrt{x+2}=0, f(-2)=0$

$\Rightarrow l_s(-2)=l_d(-2)=f(-2)\Rightarrow f$ continuă în $x_0=-2\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$. b) $\int\limits_{-3}^{-2}\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{4}-2\ln|x|\right)\Big|_{-3}^{-2}=2\ln\frac{3}{2}-\frac{5}{4}$. c) $V=\pi\int\limits_{-2}^{0}g^2(x)dx=\pi\int\limits_{-2}^{0}(x+2)dx=$

$=\pi\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-2}^{0}=\pi\left[0-\left(\frac{4}{2}-4\right)\right]=2\pi$.

VARIANTA 56

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $2\left(\sqrt{5}+4\right)-2\sqrt{5}=2\sqrt{5}+8-2\sqrt{5}=8$. **2.** $x^2+6x+9-x^2-5x=14\Leftrightarrow x+9=14\Leftrightarrow x=5$.

3. $P=1500-\frac{20}{100}1500=1500-300=1200$.

4. $3^{x^2-2x}=3^3\Leftrightarrow x^2-2x=3\Leftrightarrow x^2-2x-3=0, \Delta=b^2-4ac=4+12=16,\ x_1=3, x_2=-1$.

5. Fie M mijlocul lui $[AB]$. Atunci $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=1$; $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=2$. Din $2a+3=1$ și $b-2=2$ se obține $a=-1, b=4$.

6. Avem $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$. Se obține $BC=7$ și perimetrul egal cu 20.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A^2=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&5\\25&14\end{pmatrix}$. b) $A+I_2=\begin{pmatrix}3&1\\5&4\end{pmatrix}$, $\det(A+I_2)=3\cdot4-5\cdot1=7$.

c) $\det(A)=\begin{vmatrix}2&1\\5&3\end{vmatrix}=2\cdot3-5\cdot1=1\Rightarrow A$ inversabilă și $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$.

2. a) $f(1)=1^3-3\cdot1^2+1+1=0$. b) Restul este $f(1)=0$, iar câtul este X^2-2X-1 (pentru că $X^3-3X^2+X+1=\left(X^3-X^2\right)-\left(2X^2-2X\right)-(X-1)=(X-1)\left(X^2-2X-1\right)$).

c) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$. Din relațiile lui Viete avem $x_1+x_2+x_3=3$ și $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1$. Așadar $x_1^2+x_2^2+x_3^2=7$ și $x_1^3+x_2^3+x_3^3=15$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x)=e^x\left(x^2+2x+2\right)'+\left(e^x\right)'\left(x^2+2x+2\right)=e^x\left(x^2+4x+4\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=9e$. c) $f'(x)=e^x\left(x^2+4x+4\right)=e^x(x+2)^2\geq0, \forall x\in\mathbb{R}$. Rezultă că f este crescătoare pe $\mathbb{R}$. **2.a)** $F'(x)=\left(x^2+x-2\right)'=2x+1=f(x)\Rightarrow F$ este o primitivă a

Scanned with OKEN Scanner

lui f. b) $\int_0^1 f(x)F(x)dx=\int_0^1 F'(x)F(x)dx=\frac{F^2(x)}{2}\Big|_0^1=\frac{0}{2}-\frac{4}{2}=-2$.

c) $A=\int_0^2 f(x)dx=F(x)\Big|_0^2=F(2)-F(0)=4-(-2)=6$.

VARIANTA 57

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $C_4^2>\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}>\log_3 27$. **2.** $-3+3x\le 5-x\Rightarrow x\le 2$ şi $x\in\mathbb{N}\Rightarrow x\in\{0,1,2\}$.

3. $a_3=a_2\cdot q\Rightarrow a_3=-2; S_{20}=\frac{-\frac{1}{2}\left(2^{20}-1\right)}{2-1}=\frac{1-2^{20}}{2}$. **4.** $2^{2x+4}=2^3\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$.

5. $\sin(120^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(210^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \sin(120^\circ)+\cos(210^\circ)=0$.

6. $y-1=-\frac{6}{10}(x+2)\Leftrightarrow 3x+5y+1=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=-A$. b) $I_2=X(0)\in G$ pentru $a=0$. c) Se verifică prin calcul.

2. a) $f(\hat{1})=\hat{1}$. b) $a=\hat{0}$ şi $b=\hat{1}$. c) M are $3^2=9$ elemente.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. b) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=f'(-2)=-\frac{9}{2}$.c) f este strict crescătoare pe $(1,\infty)$ şi strict descrescătoare pe intervalele $(-\infty,0)$ şi $(0,1)$.**2.**a) $l_s(-1)=l_d(-1)=f(-1)\Rightarrow f$ este continuă în $x=-1$; fiind continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ se obţine că f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci funcţia f admite primitive. b) $\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-2}^{-1}(x+5)dx+\int_{-1}^{2}(3x^2+1)dx=\frac{31}{2}$.

c) $vol\ g(x)=\pi\int_{-2}^{-1} g^2(x)dx=\pi\int_{-2}^{-1}(x+5)^2dx=\frac{37}{3}$.

VARIANTA 58

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $4\sqrt{5}-8+4-4\sqrt{5}+5=1\in\mathbb{Z}$. **2.** Avem că $f(x^2+1)=3(x^2+1)-2=3x^2+1$ şi se obţine că $3x^2+1-3(3x-2)=1$ sau $3x^2-9x+6=0$ cu soluţiile $x\in\{1,2\}$

3. Condiţia de existenţă $(x+2)>0$. Se obţine că $x+2=2^{-1}$ cu soluţia $x=-\frac{3}{2}>-2$.

4. $C_5^4=5, A_4^3=24$ şi $P_3=3!=6$. **5.** $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}-4\vec{j}$, $a=2$, $b=-2$.

6. Triunghiul este dreptunghic . Se obţine că $\cos B=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Scanned with OKEN Scanner

1. a) $a=3, b=2 \Rightarrow \left(3+2\sqrt{2}\right)^2 = 9+12\sqrt{2}+8 = 17+12\sqrt{2}$. Având că $17^2-2\cdot 12^2 = 289-288 = 1 \Rightarrow \left(3+2\sqrt{2}\right)^2 \in A$.

b) $x=a+b\sqrt{2}$, $y=c+d\sqrt{2}$, $a^2-2b^2=1$, $c^2-2d^2=1$, $xy=ac+2bd+(ad+bc)\sqrt{2}$ și se verifică egalitatea $(ac+2bd)^2-2(ad+bc)^2=1$.

c) Fie $x=3+2\sqrt{2}$. Din b) se obține că $x\cdot x\in A$, $x\cdot x^2\in A$ și astfel $x, x^1, \ldots, x^n, \ldots \in A$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. **2.** a) $a=2$. b) Suma este 10. c) $f(1)=1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x)=\dfrac{x+2-x\ln x}{x(x+2)^2}$ și $f'(1)=\dfrac{1}{3}$. b) Ecuația este $x-3y-1=0$. c) $y=0$.

2. a) $\int_0^1 f(x)\,dx = \dfrac{3}{2\ln 2}$. b) $V=\dfrac{3\pi}{2\ln 2}$.

c) $F''(x)=f'(x)=2^x\ln 2-2^{-x}\ln 2=(\ln 2)\left(\dfrac{4^x-1}{2^x}\right)$, $F''(x)>0$, dacă $x>0$ deci F convexă, iar $F''(x)<0$, dacă $x<0$ atunci F concavă.

VARIANTA 59

SUBIECTUL I **1.** $m_a=\dfrac{x+y}{2}\Rightarrow m_a=2\sqrt{5}$ și $m_g=\sqrt{x\cdot y}\Rightarrow m_g=\sqrt{11}$.

2. $f_{\min}=-\dfrac{\Delta}{4a}\Rightarrow -\dfrac{4+4m^2}{4}=-2\Rightarrow -1-m^2=-2\Rightarrow m^2=1\Rightarrow m=\pm 1$.

3. Impunem condițiile $x^2+2>0$ și $x>0$, de unde obținem $x\in(0,+\infty)$. Ecuația devine $\dfrac{x^2+2}{x}=3\Rightarrow x^2-3x+2=0\Rightarrow x\in\{1,2\}\subset(0,+\infty)$. **4.** Dacă x este prețul fără TVA, atunci prețul de vânzare este $x+\dfrac{24}{100}\cdot x=558\Rightarrow x=450$, de unde rezultă TVA-ul este egal cu $558-450=108$ (lei). **5.** Din condiția de paralelism, rezultă că panta dreptei este egală cu -1 și atunci ecuația dreptei este $y-1=-1(x-1)\Leftrightarrow x+y-2=0$. **6.** $\cos 105^\circ=\cos(180^\circ-75^\circ)=-\cos 75^\circ \Rightarrow \sin^2 75^\circ+\cos^2 75^\circ=1$.

SUBIECTUL II **1.** a) $A_2(2,4), A_4(4,16)$. Ecuația dreptei A_2A_4: $\dfrac{x-2}{4-2}=\dfrac{y-4}{16-4}$. Se obține $6x-y-8=0$. b) $A_{(A_1A_2A_3)}=\dfrac{1}{2}\cdot|\Delta|$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&4&1\\3&9&1\end{vmatrix}=2$. Rezultă că $A_{(A_1A_2A_3)}=1$.

c) $\Delta=\begin{vmatrix}n&n^2&1\\n+1&(n+1)^2&1\\n+2&(n+2)^2&1\end{vmatrix}\overset{\substack{L_2-L1\\L_3-L1}}{=}\begin{vmatrix}n&n^2&1\\1&2n+1&0\\2&4n+4&0\end{vmatrix}=4n+4-(4n+2)=2\Rightarrow\Delta\neq 0$ pentru orice $n\in\mathbb{Z}$, deci punctele nu sunt coliniare.

Scanned with OKEN Scanner

2. a) $x\circ y=xy-2x-2y+4+2\Leftrightarrow x\circ y=x(y-2)-2(y-2)+2\Leftrightarrow x\circ y=(x-2)(y-2)+2.$

b) Se află întâi elementul neutru e.

$x\circ e=x,\ \forall\ x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow(x-2)(e-2)+2=x,\ \forall\ x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow(x-2)(e-2)-(x-2)=0,\ \forall\ x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-2)(e-3)=0,\ \forall\ x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow e=3$. Elementul $x\in\mathbb{Z}$ este simetrizabil în raport cu legea "$\circ$" dacă există $x'\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x'\circ x=x\circ x'=e$.

$$x\circ x'=3\Leftrightarrow(x-2)(x'-2)+2=3\Leftrightarrow(x-2)(x'-2)=1\Leftrightarrow x'-2=\frac{1}{x-2}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x'=\dfrac{1}{x-2}+2\\ x'\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow x-2\in D_1=\{\pm1\}\Rightarrow x\in\{1,3\}$. c) $2^{2011}\circ2^{2010}\circ\ldots\circ2^2\circ2^1\circ2^0=2$, deoarece se demonstrează că $x\circ2=2$ şi $2\circ x=2$ pentru orice x întreg(elementul 2 este element absorbant).

SUBIECTUL III **1.** a) Se arată că $f'(x)=\dfrac{-x}{1+x}$ şi $g'(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$.

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0,\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=0.$

c) Pe intervalul $(0,+\infty)$, $f'(x)<0$, deci f este funcţie strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$. $f'(0)=0,\ f_{max}=f(0)=0\Rightarrow f(x)<0,\ \forall\ x>0,\ g'(x)>0$ pe $[0,+\infty)$, deci g este funcţie strict crescătoare pe $[0,+\infty)$ şi $g_{min}=g(0)=0\Rightarrow g(x)>0,\ \forall\ x>0$.

2. a) $F'(x)=\dfrac{2011x^{2010}}{x^{2011}+1}=f(x),\ \forall\ x\in(-1,+\infty)$.

b) $F'(x)=f(x)=\dfrac{2011x^{2010}}{x^{2011}+1}\geq0,\ \forall\ x\in(-1,+\infty)\Rightarrow F$ crescătoare pe $(-1,+\infty)$. Deoarece $\dfrac{\sqrt3}{\sqrt2}\geq\dfrac{\sqrt2}{\sqrt3}\Rightarrow F\left(\dfrac{\sqrt3}{\sqrt2}\right)\geq F\left(\dfrac{\sqrt2}{\sqrt3}\right)$. c) $A=\int\limits_0^1f(x)\,dx=F(x)\Big|_0^1=\ln2.$

VARIANTA 60

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $(x-1)^2=x(x+2)\Leftrightarrow4x=1$, de unde $x=\dfrac{1}{4}\in\mathbb{R}$.

2. Condiţii de existenţă: $\begin{cases}x+1\geq0\\ x-5\geq0\end{cases}\Rightarrow x\in[5,+\infty)=D_f$. Prin ridicare la pătrat ecuaţia devine:

$x+1=x^2-10x+25$ de unde $x\in\{8\}\in D_f$. **3.** $\begin{cases}x+y=6\\ xy=8\end{cases}$. Formăm ecuaţia de gradul al II-lea:

$t^2-6t+8=0\Rightarrow t_1=2,\ t_2=4$. Deci $x=2,y=4$ sau $x=4,y=2$.

4. $2400-\dfrac{p}{100}\cdot2400=1800$. Se obţine că $24p=600\Rightarrow p=25$.

5. Avem $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

6. Dacă $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ atunci $\cos x<0$. Dar $\sin^2x+\cos^2x=1$, de unde $\cos x=-\dfrac{4}{5}$ şi

Scanned with OKEN Scanner

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$ adică $\sin 2x = -\frac{24}{25}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$; $3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 - 3A + I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. c) $A - xI_2 = \begin{pmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 4-x \end{pmatrix}$; $\det(A - xI_2) = 0 \Rightarrow (1-x)(4-x) = 0$ de unde $S = \{1, 4\}$. **2.** a) Demonstrăm că $\forall x, y \in G \Rightarrow x * y \in G$. Avem $\begin{cases} x > 4 \\ y > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-4 > 0 \\ y-4 > 0 \end{cases}$ de unde $(x-4)(y-4) > 0 \Rightarrow xy - 4x - 4y + 16 > 0$ şi $xy - 4x - 4y + 20 > 4$ adică $x * y > 4 \Rightarrow x * y \in (4, +\infty) = G$. b) $\exists e \in \mathbb{R}$ a.î. $x * e = e * x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se obţine că

$$\left.\begin{array}{l} x * e = xe - 4x - 4e + 20 \\ x * e = x \end{array}\right\} \Rightarrow xe - 4x - 4e + 20 = x \Rightarrow e(x-4) = 5x - 20 \Rightarrow e = 5.$$

c) $x * x = x^2 - 8x + 20 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0$, adică $x = 4$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2, x \in (0, +\infty)$; $xf'(x) = 3x^3 \ln x + x^3$ deci $xf'(x) - 3f(x) = x^3$, $\forall x > 0$.

b) $f'(x) = x^2(3\ln x + 1)$. Din $f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{3}$ adică $x = e^{-\frac{1}{3}}$. Alcătuim tabelul de variaţie:

x	0		$e^{-\frac{1}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|$	$\searrow$	$-\frac{1}{3e}$ (minim)	$\nearrow$	

Rezultă că $x = e^{-\frac{1}{3}}$ este punct de extreme al funcţiei f.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f''(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x\ln x + 5x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6\ln x + 5}{x} \overset{l'Hospital}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6}{x} = 0$.

2. a) g primitivă a lui $f \Rightarrow g'(x) = f(x)$. Avem că

$$g'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 = f(x),\ x \in (0, +\infty).$$

b) $\int_1^e f(x)g^3(x)dx = \int_1^e g'(x) \cdot g^3(x)dx = \frac{g^4(x)}{4}\Big|_1^e = \frac{g^4(e) - g^4(1)}{4} = \frac{e^4}{4}$.

c) g continuă pe $(0, +\infty) \Rightarrow A = \int_1^e |g(x)|dx = \int_1^e x\ln x dx$. Folosim metoda integrării prin părţi pentru $f(x) = \ln x, f'(x) = \frac{1}{x}, g'(x) = x, g(x) = \frac{x^2}{2}$ rezultă $A = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x dx = \frac{e^2+1}{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

VARIANTA 61

SUBIECTUL I

1. $a_4 = a_1 + 3r \Rightarrow a_4 = 13$. **2.** Se observă că $f(3) = 0$. Atunci $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot f(5) = 0$. **3.** Folosind formula $C_n^k = C_n^{n-k}$, observăm că are loc egalitatea $C_{2014}^{2013} = C_{2014}^{1}$. Atunci $C_{2014}^{2013} - C_{2014}^{1} = 0$. **4.** Folosind formula

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow AB = = \sqrt{(2-5)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. **5.**

$\cos 150^0 = -\cos 30^0 \Rightarrow \sin^2 30^0 + \cos^2 30^0 = 1$. **6.** $A_{(ABC)} = \dfrac{AC\cdot BC\cdot \sin C}{2} = \dfrac{3\cdot 5\cdot \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{15}{4}$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $A - B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ şi $\det(A-B) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -12$. b) $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1+0 & -1+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} =_2$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. c) $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_2$. Cum $A^2 = I_2 \Rightarrow A$ este inversabilă şi $A^{-1} = A$.

2. a) $2*0 = 2+0+2013 = 2015$ şi $(2*0)*(-2) = 2015*(-2) = 2015-2+2013 = = 4026$.

b) $x*(-2013) = x - 2013 + 2013 = x$ şi $(-2013)*x = -2013 + x + 2013 = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $x^2 * x = x^2 + x + 2013$. Ecuaţia devine $x^2 + x = 0$ cu soluţiile $x_1 = 0$ şi $x_2 = -1$.

SUBIECTUL AL III-LEA

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x + \ln x}{x} = -2$. b) $f'(x) = -2 + \dfrac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$. c) Pentru $x \in \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right), 1 - 2x < 0$, deci $f'(x) < 0$ şi f este descrescătoare. **2.** a) F derivabilă şi

$F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \left(x^2\right)' + 2014x' - 3' = 2x + 2014 = f(x)$. b) $\int_0^1 f(x)\,dx =$

$= F(x)\Big|_0^1 = F(1) - F(0) = 2015$. c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{G(x) - G(0)}{x - 0} = G'(0) = f(0) = 2014$ (G prmimitivă pentru f, atunci $G'(0) = f(0)$).

SESIUNEA IUNIE -2013

SUBIECTUL I **1.** $3\left(2 - \sqrt{2}\right) = 6 - 3\sqrt{2}$ şi se obţine că $6 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6$. **2.** $f(0) = -1, f(2) = 1$ şi $f(0)\cdot f(2) = -1$. **3.** $5^{x-2} = 5^2 \Rightarrow x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4$. **4.** $10\%\cdot 100 = 10$. Preţul după scumpire este 110 *lei*. **5.** $AB = \sqrt{(1-1)^2 + (3-1)^2} \Rightarrow AB = 2$.

6. $\cos 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \cos 135^0 = = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ şi $\cos 45^0 + \cos 135^0 = 0$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $M\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ şi rezultă că $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M(0)$.

b) $\det(M(a)) = \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{vmatrix} = 4a^2$. Rezultă că $4a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$. c) $M(-2) + M(-1) + M(0) +$

Scanned with OKEN Scanner

$+M(1)+M(2)=\big(M(-2)+M(2)\big)+\big(M(-1)+M(1)\big)+M(0)=3M(0)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

2. a) $f(1)=1^3-2\cdot1^2+1=1-2+1=0$. b) Câtul este X şi restul este $-X+1$.

c) Din relaţiile lui Vietet avem $x_1+x_2+x_3=2, x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0$, rezultă că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4-2\cdot0=4$.

SUBIECTUL AL III-LEA

1. a) $f'(x)=\left(\sqrt{x}-1\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. Atunci $2\sqrt{x}f'(x)=2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. b) Ecuaţia tangentei se scrie $y-f(4)=f'(4)(x-4)$. Dar $f(4)=1, f'(4)=\frac{1}{4}\Rightarrow$ ecuaţia tangentei este $y=\frac{1}{4}x$. c) $f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. Rezultă că $f''(x)<0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$. **2.** a) $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2(2x+1)dx=\left(x^2+x\right)\Big|_1^2=(4+2)-(1+1)=4$. b) $F'(x)=\left(x^2+x+\ln x\right)'=2x+1+\frac{1}{x}$, deci $F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow F$ este o primitivă a funcţiei f. c) $A=\int_1^2|f(x)|dx=\int_1^2\left(2x+1+\frac{1}{x}\right)dx=\left(x^2+x+\ln x\right)\Big|_1^2=4+2+\ln2-$ $-1-1-\ln1=4+\ln2$.

SESIUNEA AUGUST -2013

SUBIECTUL I

1. $3\left(4-\sqrt{3}\right)=12-3\sqrt{3}$ şi $12-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}=12$. **2.** $f(-4)=0$ şi $f(4)=0\Rightarrow f(-4)+$ $+f(4)=0$. **3.** $(x-2)^2=x^2-4x+4$. Rezultă ecuaţia $x^2-4x+4-x^2+8=0$ cu soluţia $x=3$.

4. Preţul a scăzut cu $\frac{30}{100}\cdot100=30$. Preţul după ieftinire este $100-30=70$ *lei*.

5. $AB=\sqrt{(2-2)^2+(1-4)^2}\Rightarrow AB=3$. **6.** $\sin^2A+\cos^2A=1\Rightarrow\cos^2A=\frac{3}{4}$. Deoarece $A<90^0\Rightarrow\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL AL II-LEA

1. a) $\det A=\begin{vmatrix}2&-2\\0&2\end{vmatrix}=4-0=4$. b) $A\cdot B=\begin{pmatrix}2b&2-2b\\0&2b\end{pmatrix}$. Din egalitatea $A\cdot B=2I_2\Rightarrow$ $\Rightarrow 2b=2$ şi $2-2b=0$, deci $b=1$. c) $A+B=\begin{pmatrix}2+b&-1\\0&2+b\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A+B)=(2+b)^2$. Rezultă că $(2+b)^2=0\Leftrightarrow b=-2$. **2.** a) $f(1)=1^3-3\cdot1^2+2\cdot1=1-3+2=0$. b) Câtul este X^2-X. Restul este 0. c) Din relaţiile lui Viete avem: $x_1+x_2+x_3=3, x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=2$. Rezultă că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=3^2-2\cdot2=5$.

SUBIECTUL AL III-LEA

Scanned with OKEN Scanner

a) $f'(x)=\left(x^3+6x^2+12x+8\right)'=3x^2+12x+12$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. b) $f'(x)==3(x+2)^2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Se obține că $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+12x+12}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(3+\dfrac{12}{x}+\dfrac{12}{x^2}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\dfrac{12}{x}+\dfrac{12}{x^2}\right)=3$. **2.a)**

$F'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right)'=x^2+1$, deci $F'(x)=f(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\Rightarrow F$ este o primitivă a funcției f. b) $A=\int\limits_0^1|f(x)|\,dx=\int\limits_0^1\left(x^2+1\right)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1=\dfrac{4}{3}$.

c) $\int\limits_1^2\dfrac{f(x)}{x}dx=\int\limits_1^2\dfrac{x^2+1}{x}dx==\int\limits_1^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+\ln x\right)\Big|_1^2=\dfrac{3}{2}+\ln 2$.

SESIUNEA IUNIE -2014

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $10+5\sqrt{3}-5\sqrt{3}=10$. **2.** $f(1)=1+3=4\Rightarrow a=4$ **.3.** Se obține ecuația $2x+1=5$ cu soluția $x=2$ care verifică condiția de existență, $2x+1>0$ **.4.** Sunt 90 de numere de două cifre. Cele divizibile cu 10 sunt: $10,20,30,...,90$ deci 9 numere, $p=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}$.

5. $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{1+0}=1$. **6.** $\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$, $\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow E=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $\det(A)=4\cdot 2-1\cdot 8=0$. b) $B+C=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&x\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&x+2\\1&2\end{pmatrix}$. Din egalitatea $\begin{pmatrix}4&x+2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&8\\1&2\end{pmatrix}\Rightarrow x+2=8\Rightarrow x=6$. c) $B^2=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&2\end{pmatrix}=-B$ deci $B^2+B=-B+B=O_2$. **2.** a) $0\circ(-4)=0\cdot(-4)+4\cdot 0+4\cdot(-4)+12=-16+12=-4$.

b) $(x+4)(y+4)-4=xy+4x+4y+16-4=xy+4x+4y+12=x\circ y$.

c) Se obține că: $(x+4)^2-4=12$ cu soluțiile $x\in\{0,-8\}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x)=(\ln x)'-\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1'\cdot x-x'}{x^2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x+1}{x^2}$. b) $l=f'(2)=\dfrac{2+1}{2^2}=\dfrac{3}{4}$.

c) Ecuația este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ și rezultă $y=2x-3$.

2. a) $\int\limits_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e^1-e^0=e-1$. b) Avem că: $F'(x)=\left(e^x-\dfrac{x^2}{2}-1\right)'=e^x-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

c) $\int\limits_0^1\left(e^x-\dfrac{x^2}{2}-1\right)dx=\left(e^x-\dfrac{x^3}{6}-x\right)\Big|_0^1=e-\dfrac{1}{6}-1-1=e-\dfrac{13}{6}$.

Scanned with OKEN Scanner

SESIUNEA AUGUST -2014

SUBIECTUL I **1.** $\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{9-4}{6}=\frac{5}{6}$. **2.** Din egalitatea $f(x)=g(x)$ se obține că $2x-3=x+1$ cu soluția $x=4$. **3.** $x^2+5>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Prin ridicare la pătrat se obține că $x^2+5=9$ cu soluția $x\in\{-2,2\}$. **4.** Prețul nou va fi $p=120+120\frac{10}{100}=132(lei)$. **5.** $AB=3, BC=4, AC=5$ și $p=12$. **6.** $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL II

1. a) $\det(A)=0-2=-2$. b) $A+B=\begin{pmatrix}1+b & 2+b\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, iar $AB+C=\begin{pmatrix}b+1 & b+2\\ b & b\end{pmatrix}$, deci $b=1$.

c) $B+2C=\begin{pmatrix}b+2 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\det(B+2C)=b+2$, iar $\det(B)-\det(A)=b-(-2)=b+2$.

2. a) $f(1)=1-4+1+2=0$. b) Polinomul se divide cu $X-1$, deci $r=0$. Câtul este $q=X^2-3X-2$. c) Din relațiile lui Viete avem că $x_1+x_2+x_3=4, x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=1$, $x_1x_2x_3=-2$. Atunci $E=4\cdot\frac{1}{-2}=-2$.

SUBIECTUL III

1. a) $I=1-\ln 1=1$. b) $f'(x)=\left(x^2\right)'-(\ln x)'=2x-\frac{1}{x}$. c) $f''(x)=\left(2x-\frac{1}{x}\right)'=2+\frac{1}{x^2}>0$, $\forall x\in(0,+\infty)$, deci f este convexă. **2.** a) $\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{0}{3}=\frac{1}{3}$.

b) $A=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right)\Big|_0^1=\ln 2-\frac{1}{2}$. c) Fie F o primitivă pentru funcția f. Atunci $F'(x)=f(x)=\frac{x^2}{x+1}\geq 0, \forall x\in(-1,+\infty)$, deci F este crescătoare pe $(-1,+\infty)$.

SESIUNEA IUNIE -2015

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{20}{7}=\frac{7}{10}\cdot\frac{20}{7}=2$. **2.** $A\in G_f$, dacă și numai dacă $f(a)=0$. Se obține că $0=f(a)=a-2$ cu soluția $a=2$. **3.** Condiția de existență $x+3\geq 0$. Prin ridicare la pătrat se obține ecuația $x+3=16$, cu soluția $x=13$.

4. Mulțimea M are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile. Numere divizibile cu 15 sunt: 30,60,90 deci sunt 3 cazuri favorabile. Rezultă că $p=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$. **5.** M mijlocul segmentului $[AB]$, este punctul $M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$. Se obține $M\left(\frac{4+4}{2},\frac{2+6}{2}\right)$, deci $M(4,4)$. **6.**

Scanned with OKEN Scanner

Din relația $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, se obține că $\frac{25}{169}+\sin^2 x=1$ sau $\sin^2 x=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}$.

Astfel, cu $\sin x>0$ se obține că $\sin x=\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{12}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a) $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2$. b) $A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=5C$.

c) Avem că $AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 20 & 13\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 20\\ 5 & 8\end{pmatrix}$.

Rezultă că $AB+BA+4I_2=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 20 & 13\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}13 & 20\\ 5 & 8\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}21 & 25\\ 25 & 21\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & 25\\ 25 & 25\end{pmatrix}=25\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=25C$ **2.** a) Avem că:

$5\circ(-4)=5\cdot(-4)+4\cdot(-4)+4\cdot 5+12=-20-16+20+12=-16+12=-4$.

b) Avem că: $(x+4)\cdot(y+4)-4=xy+4x+4y+16-4=xy+4x+4y+12=$

$=x\circ y$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. c) Se obține că $x\cdot x+4x+4x+12=x$, de unde rezultă ecuația $x^2+7x+12=0$. Deoarece $\Delta=49-48=1$, avem soluțiile $x_1=\frac{-7+1}{2}=\frac{-6}{2}=-3$ și $x_2=\frac{-7-1}{2}=-4$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) Funcția este derivabilă (funcție elementară) și se obține că $f'(x)=(2x^3)'+(3x^2)'+5'=6x^2+6x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Așadar $f'(x)=6x(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) Avem că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)-2x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x^2+6x}{3x^2+5}=\frac{6}{3}=2$.

c) Ecuația $f'(x)=0$ se scrie $6\cdot x\cdot(x+1)=0$ și are soluțiile $x=0$ și $x=-1$. Alcătuim tabelul de monotonie:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+++++++++	0	----------	0++++++++++
$f(x)$	↗↗↗↗↗	↘↘↘↘		↗↗↗↗↗

Funcția este crescătoare pe intervalele $(-\infty,-1]$ și $[0,+\infty)$ și descrescătoare pe intervalul $[-1,0]$. **2.** a) Avem că $\int_1^2\left(f(x)-3x^2\right)dx=\int_1^2\left(4x^3\right)dx=4\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_1^2=x^4\Big|_1^2=16-1=15$.

b) Avem că $\int f(x)dx=\int\left(4x^3+3x^2\right)dx=x^4+x^3+C$. Primitivele au forma $F(x)=x^4+x^3+m, m\in\mathbb{R}$. Condiția $F(1)=2015$, conduce la $1+1+m=2015$ și $m=2013$

Scanned with OKEN Scanner

şi $F(x)=x^4+x^3+2013$. c)Deoarece $\frac{f(x)}{x^2}=4x+3$, integrala este $\int_1^n(4x+3)dx=9$ de unde $\left(2x^2+3x\right)\Big|_1^n=9$ sau $2n^2+3n-5=9$ cu soluţiile $n\in\{2,-7\}$. Convine numai $n=2$.

SESIUNEA IUNIE -2016

SUBIECTUL I

1. $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$. Rezultă că $\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{3}=1$. **2.** $f(1)=0\Rightarrow 1-a=0\Rightarrow a=1$. **3.** $x+1=25\Leftrightarrow x=24$, care verifică ecuaţia. **4.** Mulţimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile. Multiplii de 30 din mulţimea M sunt 30, 60 şi 90, deci 3 cazuri favorabile. Rezultă că $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$. **5.** $x_M=5$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB şi $y_M=5$. **6.** $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$ şi cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obţinem $\sin x=\frac{12}{13}$, iar $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{12}{13}\cdot\frac{13}{5}=\frac{12}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. a) $\det A=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0-1\cdot(-1)=1$. b) $B\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B\cdot B+A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$. c) $A+B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Atunci $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^x & 0\\ 0 & 4^y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}2^x=1\\ 4^y=1\end{cases}$, deci $x=0$ şi $y=0$. **2.** a) $f(1)=1^3-2\cdot 1-2\cdot 1+1=-2$. b) Câtul este X^2-3X+1. Restul este 0. c) $x_1+x_2+x_3=2$. Atunci $(x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1+x_2)=(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)=f(2)=-3$.

SUBIECTUL al III-lea

1. a) $f'(x)=-3x^2+3=3(1-x^2)=3(1-x)(1+x), x\in\mathbb{R}$. b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=$ $=f'(2)=-9$. c) $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=1$. Pentru $x\in[-1,1]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-1,1]$. Pentru $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[1,+\infty)$. Cum $f(1)=4$, obţinem $f(x)\leq 4$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

2. a) $\int_{-1}^{1}(f(x)-2)dx=\int_{-1}^{1}(x+2-2)dx=\int_{-1}^{1}xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$. b) $\int_0^1 e^x f(x)dx=$ $=\int_0^1 e^x(x+2)dx=e^x(x+2)\Big|_0^1-e^x\Big|_0^1=(3e-2)-(e-1)=2e-1$. c) $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a(x+2)dx=$ $=\frac{a^2}{2}+2a$, iar $\int_0^{6-a}(f(x)-4)dx=\int_0^{6-a}(x-2)dx=\frac{(6-a)^2}{2}-2(6-a)$. Rezultă că $\frac{a^2}{2}+2a=\frac{(6-a)^2}{2}-2(6-a)\Leftrightarrow a=1$.

Scanned with OKEN Scanner